

# TEOREMI DI RAPPRESENTAZIONE PER ALCUNE CLASSI DI CONNESSIONI SU DI UNA VARIETÀ QUASI COMPLESSA (\*)

di GIOVANNI BATTISTA RIZZA (a Parma) (\*\*)

SOMMARIO. - Su una varietà quasi complessa le connessioni delle classi  $e_0, e_+, e_-$  e di MARTINELLI possono rappresentarsi localmente con una formula del tipo  $\Lambda = \Gamma + \Omega(E)$ , dove  $\Gamma$  è una connessione simmetrica arbitraria,  $E$  un arbitrario tensore emisimmetrico, (1,2) ed  $\Omega$  un conveniente endomorfismo, caratteristico della classe. Una formula meno semplice sussiste per le connessioni nelle quali la struttura quasi complessa è parallela.

SUMMARY. - Connexions of the classes  $e_0, e_+, e_-$  and MARTINELLI's connexions of an almost complex manifold are locally given by  $\Lambda = \Gamma + \Omega(E)$ , where  $\Gamma$  is an arbitrary symmetric connexion,  $E$  an arbitrary skew-symmetric tensor (1,2) and  $\Omega$  a convenient linear transformation associated with the class. A more complicated formula holds for the connexions with the property that the almost complex structure is parallel.

## 1. Introduzione.

È noto che sulle varietà quasi complesse sono state considerate diverse classi di connessioni.

Una prima parte di questo lavoro si riferisce alle *connessioni di MARTINELLI* ed alle *connessioni*  $e_0, e_+, e_-$ , introdotte e studiate in un mio precedente lavoro (<sup>1</sup>).

(\*) Pervenuto in Redazione il 15 febbraio 1969.

Lavoro eseguito nell'ambito del Raggruppamento di Ricerca matematica n. 1 del C.N.R.. I principali risultati sono stati annunciati al VIII Congresso U.M.I. (ved. il n. [8] della bibliografia).

(\*\*) Indirizzo dell'Autore: Via Linati 5 — 43100 Parma.

(<sup>1</sup>) G. B. RIZZA, [6].

Per queste classi di connessioni vengono stabiliti *teoremi di rappresentazione*, che riflettono in modo essenziale la decomposizione canonica di una connessione in connessione simmetrica associata e torsione (teor.  $T_1, T_2, T_3, T_4$ , n. 7).

Nelle formule, che rappresentano la generica connessione delle varie classi, intervengono elementi arbitrari (connessioni, campi tensoriali); ciò permette di farsi una idea quantitativa sulle connessioni che costituiscono le singole classi.

Alla luce dei teoremi sopra accennati, gli omomorfismi  $K$  e  $Q$  da me introdotti per altri scopi nel 1965 e qui ampiamente studiati al n. 4, acquistano ora nuovo motivo di interesse.

Una seconda parte del lavoro è dedicata invece alle *connessioni, per le quali il campo  $\mathcal{H}$ , che definisce la struttura quasi complessa, riesce parallelo*.

La medesima tecnica, che ha condotto ai teoremi della prima parte, permette di stabilire, anche per questa classe di connessioni, un *teorema di rappresentazione* (teor.  $T_5$ , n. 9), di tipo essenzialmente diverso da quello noto nella letteratura<sup>(2)</sup>.

Per questo teorema possono ripetersi le osservazioni precedenti.

Infine, con riferimento alle *connessioni di MARTINELLI per le quali  $\mathcal{H}$  è parallelo*, viene ritrovato per altra via un *teorema di rappresentazione* (teor.  $T_6$ , n. 9), dovuto ad A. COSSU<sup>(3)</sup>.

## 2. Struttura quasi complessa.

Sia  $V$  una varietà a struttura quasi complessa<sup>(4)</sup>,  $\dim V = 2n$  ( $n \geq 2$ ),  $\text{cl } V = r$  ( $r \geq 1$ )<sup>(5)</sup>,  $x$  un punto di  $V$ ,  $\tau$  lo spazio vettoriale tangente in  $x$  a  $V$ ,  $\tau_*$  lo spazio vettoriale duale.

Indicati con  $\mathcal{H}$  il campo tensoriale misto,  $\text{cl } \mathcal{H} = s$  ( $1 \leq s \leq r-1$ ), che determina la struttura di  $V$ , e con  $\mathcal{N}$  il campo di NIJENHUIS associato ad  $\mathcal{H}$ , siano  $h \in \tau_* \otimes \tau$  ed  $N \in \tau_* \otimes \tau_* \otimes \tau$  i corrispondenti tensori nel punto  $x$  di  $V$ .

<sup>(2)</sup> Ved. K. YANO, [10], Ch. X, n. 2 e [11], Ch. VI, n. 1, 2; A. COSSU, [3], n. 2 e il n. 12 di questo lavoro.

<sup>(3)</sup> A. COSSU, [3], n. 2.

<sup>(4)</sup> Per le nozioni fondamentali si veda p. es. B. ECKMANN, [4], I, II, III, VI; K. YANO, [11], VI; G. B. RIZZA, [6], n. 2 cui si rinvia per le notazioni.

<sup>(5)</sup> Cioè  $V$  è di classe  $C_r$ .

È utile ricordare che

$$(1) \quad c_2^1(h \otimes h) = c_1^2(h \otimes h) = -\delta,$$

dove  $\delta$  è il tensore di KRONECKER e le  $c_{ik}^j$  indicano contrazione<sup>(6)</sup>.

### 3. Isomorfismo $W$ .

L'esistenza di una struttura quasi complessa su  $V(n, 2)$  permette di introdurre nello spazio vettoriale  $\mathcal{C} = \tau_* \otimes \tau_* \otimes \tau$  diversi omomorfismi, che nel seguito avranno un ruolo importante.

Convieni anzitutto considerare l'*isomorfismo ausiliario*  $W$ , definito, per ogni tensore  $L$  di  $\mathcal{C}$ , da

$$(2) \quad W(L) = -c_3^1(c_2^2(L \otimes h) \otimes h) = -c_2^2(c_3^1(L \otimes h) \otimes h).$$

Tenuta presente la (1) segue subito che  $W$  è un *isomorfismo involutorio*, cioè

$$(3) \quad W^2 = I,$$

ove  $I$  è l'identità.

Indicati con  $\sigma, \varepsilon$  gli *omomorfismi di simmetrizzazione, di emi-simmetrizzazione* di  $\mathcal{C}$ <sup>(7)</sup>, si consideri l'*isomorfismo involutorio*  $\alpha$ , definito da

$$\alpha = \sigma - \varepsilon.$$

Ciò premesso, sussiste la relazione

$$(4) \quad \alpha W \alpha W = W \alpha W \alpha.$$

Tenuto conto della (1), la dimostrazione della (4) non presenta difficoltà.

<sup>(6)</sup> Precisamente  $c_k^j$  è l'applicazione tensoriale di contrazione relativa allo  $j$ -esimo indice di contravarianza e al  $k$ -esimo indice di covarianza (Ved. per esempio N. BOURBAKI, [1], p. 45).

<sup>(7)</sup> Indotti in  $\mathcal{C}$  dagli analoghi omomorfismi di  $\tau_* \otimes \tau_*$ .

L'isomorfismo ausiliario  $W$  consente di scrivere in modo semplice alcune condizioni formali da me introdotte in un precedente lavoro<sup>(8)</sup> ed utili nel seguito.

Sia  $\Omega$  un qualunque omomorfismo di  $\mathcal{C}$ ; conviene porre

$$(5) \quad \Omega^* = I - \Omega.$$

Si considerino ora, per un tensore  $L \in \mathcal{C}$  le condizioni

$$\mathcal{A} \quad W^*(L) = 0; \quad (\alpha W \alpha)^*(L) = 0,$$

$$\mathcal{B} \quad (W \alpha)^*(L) = 0; \quad (\alpha W)^*(L) = 0,$$

$$\mathcal{C} \quad (\alpha W \alpha W)^*(L) = 0,$$

$$\mathcal{D} \quad (W \alpha W)^*(L) = 0.$$

Si riconosce immediatamente che le condizioni  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ , sono rispettivamente equivalenti alle condizioni  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  del lavoro [6]<sup>(9)</sup>.

Conviene notare che gli isomorfismi  $W, \alpha W \alpha, \alpha W \alpha W, W \alpha W$  sono involutori; pertanto, in virtù di una proprietà generale, gli omomorfismi  $\frac{1}{2} W^*, \frac{1}{2} (\alpha W \alpha)^*, \frac{1}{2} (\alpha W \alpha W)^*, \frac{1}{2} (W \alpha W)^*$ , che figurano a primo membro nelle condizioni  $\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ , sono omomorfismi idempotenti. Il risultato segue immediatamente dalle (3), (4), (5).

Con dimostrazione elementare si ottengono le proprietà<sup>(10)</sup>:

$\mathbf{P}_1$  — La condizione  $\mathcal{B}_1$  implica la condizione  $\mathcal{C}$ ; analogamente la condizione  $\mathcal{B}_2$  implica la condizione  $\mathcal{C}$ .

$\mathbf{P}_2$  — Se  $L$  soddisfa alle condizioni  $\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_2$  oppure alle condizioni  $\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1$ , allora  $L$  è un tensore simmetrico ( $\varepsilon(L) = 0$ ) e soddisfa alle condizioni  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ .

<sup>(8)</sup> G. B. RIZZA, [6], p. 240.

<sup>(9)</sup> Invero le condizioni  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{C}, \mathcal{D}$  coincidono rispettivamente con le condizioni  $\mathbf{A}'_1, \mathbf{A}'_2, \mathbf{B}'_1, \mathbf{B}'_2, \mathbf{C}', \mathbf{D}'$  al n. 7 del lavoro citato.

<sup>(10)</sup> Queste proprietà generalizzano una osservazione all'inizio della p. 241 del lavoro [6].

4. Omomorfismi  $K$  e  $Q$ .

Si considerino ora nello spazio vettoriale  $\mathcal{C}$  gli omomorfismi:

$$(6) \quad K = \frac{1}{4}(I + W\alpha + \alpha W + \alpha W\alpha W),$$

$$(7) \quad Q = \frac{1}{4}(I + W + \alpha W\alpha + \alpha W\alpha W),$$

da me introdotti in precedenti lavori <sup>(11)</sup>.

Sussistono le proprietà:

$P_3$  — Gli omomorfismi  $K, Q$  sono idempotenti; cioè

$$(8) \quad K^2 = K, \quad Q^2 = Q.$$

$P_4$  — Gli omomorfismi  $K, Q$  sono permutabili con gli isomorfismi  $\alpha$  e  $W$ ; precisamente:

$$(9) \quad \alpha K = K\alpha = WK = KW,$$

$$(10) \quad \alpha Q = Q\alpha; \quad WQ = QW.$$

Alle (8), (9), (10) si perviene direttamente, tenendo conto delle (3), (4) e del carattere involutorio di  $\alpha$ .

Poichè  $\sigma = \frac{1}{2}(I + \alpha)$  ed  $\varepsilon = \frac{1}{2}(I - \alpha)$ , da  $P_4$  segue immediatamente la permutabilità di  $K$  e di  $Q$  con  $\sigma$  ed  $\varepsilon$ .

In modo analogo si ottengono le uguaglianze

$$(11) \quad \begin{aligned} KQ &= \sigma Q = Q\sigma, \\ QK &= \sigma K = K\sigma, \end{aligned}$$

utili nel seguito.

Convieni ora segnalare due gruppi di uguaglianze, che si stabiliscono senza difficoltà con l'ausilio delle (3), (4). Precisamente:

$$(12) \quad \begin{aligned} \alpha W\alpha W - I &= (2I + \alpha W + W\alpha)(K - I) \\ \alpha W - I &= (2I + W\alpha + \alpha W\alpha W)(K - I), \\ W\alpha - I &= (2I + \alpha W + \alpha W\alpha W)(K - I). \end{aligned}$$

<sup>(11)</sup> Si riconosce senza difficoltà che le definizioni di  $K$  e  $Q$  date dalle (6), (7) equivalgono a quelle espresse rispettivamente dalle (22) a pag. 241 del lavoro [6] e dalla (10) a p. 12 del lavoro [7].

$$\begin{aligned}
 \alpha W \alpha W - I &= (2I + W + \alpha W \alpha)(Q - I), \\
 (13) \quad W - I &= (2I + \alpha W \alpha + \alpha W \alpha W)(Q - I), \\
 \alpha W \alpha - I &= (2I + W + \alpha W \alpha W)(Q - I).
 \end{aligned}$$

Dalle (6), (7), (12), (13) discende immediatamente la proprietà <sup>(12)</sup>.

**P<sub>5</sub>** — Le condizioni  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  sono equivalenti alla condizione

$$(14) \quad Q(L) = L.$$

Le condizioni  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  sono equivalenti alla condizione

$$(15) \quad K(L) = L.$$

Infine, è utile nel seguito l'uguaglianza

$$(16) \quad 2(K + Q)\varepsilon = (I + \alpha W \alpha W)\varepsilon,$$

di dimostrazione elementare.

### 5. Omomorfismi $r, s$ .

Si consideri ora l'isomorfismo ausiliario  $\lambda$  definito, per ogni tensore  $L$  di  $\mathcal{T}$ , da

$$(17) \quad \lambda(L) = c_3^1(L \otimes h).$$

Di dimostrazione immediata è la proprietà:

**P<sub>6</sub>** — L'isomorfismo  $\lambda$  è anti-involutorio e riesce permutabile con gli omomorfismi  $\alpha, W, K, Q$ .

Sono utili nel seguito gli omomorfismi  $r, s$  definiti da

$$(18) \quad 4r = (W - W\alpha - \alpha W + \alpha W\alpha)\lambda,$$

$$(19) \quad 4s = (W - W\alpha + \alpha W - \alpha W\alpha)\lambda - 2(I + \alpha)\lambda,$$

introdotti recentemente da V. MANGIONE <sup>(13)</sup>.

<sup>(12)</sup> La seconda parte è già nota (G. B. RIZZA, [6], T<sub>1</sub>, p. 242).

<sup>(13)</sup> V. MANGIONE, [5], n. 7, formule (24), (25).

## 6. Connessioni su $V$ .

Si considerino ora sulla varietà  $V$  le *connessioni affini*.

È ben noto che ogni connessione determina univocamente una connessione simmetrica (*connessione simmetrica associata*) ed un campo tensoriale emisimmetrico doppiamente covariante e semplicemente contravariante (*torsione*). Inversamente, assegnati una arbitraria connessione simmetrica ed un campo tensoriale del tipo indicato, riesce individuata una connessione sulla varietà<sup>(14)</sup>.

Con riferimento al punto  $x$  di  $V$  si scriverà brevemente:

$$(20) \quad A = \Gamma_A + T_A,$$

$A$  denotando in  $x$  la connessione generica,  $\Gamma_A$  la connessione simmetrica associata e  $T_A$  la torsione di  $A$ .  $T_A$  appartiene a  $\mathcal{C}$  e la proprietà di emisimmetria può riassumersi in  $T_A = \varepsilon T_A$ .

A partire dal campo  $\mathcal{H}$  della struttura quasi complessa (n. 2), per derivazione covariante nella connessione, si costruisce un nuovo campo tensoriale; sia  $D_A h$  il *tensore* di  $\mathcal{C}$  che definisce questo campo nel punto  $x$  di  $V$ <sup>(15)</sup>.

Intervengono nel seguito anche i tensori  $R(A)$ ,  $S(A)$  associati alla connessione, introdotti in un precedente lavoro<sup>(16)</sup>. Con l'ausilio degli omomorfismi  $r$ ,  $s$  del n. 5, i tensori  $R(A)$ ,  $S(A)$  possono definirsi così

$$(21) \quad 2 R(A) = r(D_A h), \quad 2 S(A) = s(D_A h) \quad (17).$$

## 7. Connessioni di MARTINELLI. Connessioni $e_0$ , $e_+$ , $e_-$ .

Sulle varietà a struttura quasi complessa sono note diverse classi di connessioni. Quelle indicate nel titolo hanno interessanti proprietà geometriche e sono caratterizzate tutte da opportune condizioni sulla torsione<sup>(18)</sup>.

<sup>(14)</sup> Cfr. p. es. J. A. SCHOUTEN, [9], p. 126; G. B. RIZZA, [6], p. 236.

<sup>(15)</sup> Ved. p. es. G. B. RIZZA, [6], n. 3.

<sup>(16)</sup> G. B. RIZZA, [6], n. 3.

<sup>(17)</sup> Ved. V. MANGIONE, [5], n. 7, formula (26).

<sup>(18)</sup> Per maggiori notizie su queste connessioni si rinvia a G. B. RIZZA, [6].

Precisamente una connessione  $A$  di  $V$  è una *connessione*  $\varrho_+$ , una *connessione*  $\varrho_-$ , una *connessione*  $\varrho_0$ , quando, in ogni punto  $x$  di  $V$ , il tensore di torsione  $T_A$  soddisfa, rispettivamente, alle condizioni  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{D}$  del n. 3.

Analogamente una connessione  $A$  di  $V$  è una *connessione di MARTINELLI*, se in ogni punto  $x$  di  $V$  il tensore  $T_A$  soddisfa alla condizione  $\mathcal{C}$ .

Ciò premesso, sussistono i *teoremi di rappresentazione* annunciati al n. 1. Precisamente, indicata con  $\Gamma$  un'arbitraria *connessione simmetrica* e con  $E$  un *arbitrario tensore emisimmetrico di  $\mathcal{C}$*  si ha:

$T_1$  — *Le connessioni  $\varrho_+$  sono, tutte e sole, rappresentate, nel punto generico  $x$  di  $V$ , dalla*

$$(22) \quad A = \Gamma + Q(E).$$

$T_2$  — *Le connessioni  $\varrho_-$ , sono, tutte e sole, rappresentate, nel punto generico  $x$  di  $V$ , dalla*

$$(23) \quad A = \Gamma + K(E).$$

$T_3$  — *Le connessioni  $\varrho_0$  sono, tutte e sole, rappresentate, nel punto generico  $x$  di  $V$ , dalla*

$$(24) \quad A = \Gamma + E - K(E) - Q(E).$$

$T_4$  — *Le connessioni di MARTINELLI sono, tutte e sole, rappresentate, nel punto generico  $x$  di  $V$ , dalla*

$$(25) \quad A = \Gamma + K(E) + Q(E).$$

Convieni notare che, ponendo nella (25)  $Q(E)$ ,  $K(E)$  in luogo di  $E$ , si perviene, rispettivamente alle (22), (23). Si ritrova così un noto risultato<sup>(19)</sup>:

*Le connessioni  $\varrho_+$  e le connessioni  $\varrho_-$  sono connessioni di MARTINELLI.*

Infine, per quanto concerne l'esistenza di connessioni delle quattro classi considerate, si noti che è sempre possibile introdurre su  $V$  una *metrica Riemanniana*<sup>(20)</sup> e scegliere come *connessione*

<sup>(19)</sup> Ved. G. B. RIZZA, [6], teor.  $T_2$ ,  $T_3$  e osservazione all'inizio di pag. 241. Più esplicitamente, G. B. RIZZA, [7], n. 10.

<sup>(20)</sup> Ved. p. es. K. YANO, [11], p. 132.



simmetrica  $\Gamma$  la connessione di LEVI-CIVITA  $\overset{\circ}{\Gamma}$  associata alla metrica. Potrà poi scegliersi, in ogni punto  $x$  di  $V$ , come  $E$  il tensore  $N$  (n. 2) ovvero il tensore  $\varepsilon(D_P^{\circ} h)$  (n. 6).

## 8. Dimostrazioni.

Alla dimostrazione dei teoremi del n. 7 conviene premettere come Lemma una proprietà generale degli omomorfismi idempotenti in un arbitrario spazio vettoriale <sup>(21)</sup>.

Precisamente, sia  $\mathcal{V}$  uno spazio vettoriale su di un campo  $\mathbf{K}$ ,  $\Omega$  un omomorfismo idempotente di  $\mathcal{V}$  ed  $\Omega^*$  l'omomorfismo  $I - \Omega$ . Sussiste il Lemma:

**L** — *Assegnato un elemento  $A$  di  $\mathcal{V}$ , condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione*

$$(26) \quad \Omega(X) = A,$$

*ammetta soluzione  $X$  in  $\mathcal{V}$  è*

$$(27) \quad \Omega^*(A) = 0.$$

*Se la (27) è soddisfatta, la soluzione generale della (26) è*

$$(28) \quad X = A + \Omega^*(C),$$

*con  $C$  elemento arbitrario di  $\mathcal{V}$ .*

Nel caso attuale si consideri il sottospazio  $\mathcal{C}_e$  costituito dai tensori emisimmetrici di  $\mathcal{C}$ .

Come si è scritto al n. 7, le connessioni  $\varrho_+$ ,  $\varrho_-$  si ottengono tutte considerando, in ogni punto  $x$  di  $V$ , la totalità dei tensori di torsione  $T_A$  soddisfacenti alle condizioni  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ , rispettivamente. Ciò, in virtù della proprietà  $\mathbf{P}_5$  del n. 4, equivale a ricercare la più generale soluzione emisimmetrica (cioè in  $\mathcal{C}_e$ ) delle equazioni

$$(29) \quad Q^*(X) = 0, \quad K^*(X) = 0.$$

Analogamente, per le connessioni  $\varrho_0$  e di MARTINELLI, legate alle condizioni  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{C}$  del n. 3, si perviene, rispettivamente alle

<sup>(21)</sup> Ved. p. es. N. BOURBAKI, [2], Proposition 1, p. 7.

equazioni:

$$W \alpha W (X) = X, \quad \alpha W \alpha W (X) = X,$$

le quali, nello spazio  $\mathcal{C}_\varepsilon$  in cui vanno ricercate le soluzioni, sono equivalenti alle equazioni

$$(30) \quad \frac{1}{2} (I + \alpha W \alpha W) (X) = 0, \quad \frac{1}{2} (I - \alpha W \alpha W) (X) = 0 \quad (22).$$

Si considerino ora gli omomorfismi, che intervengono a primo membro nelle (29), (30). Essi, si riconosce immediatamente, sono permutabili con l'omomorfismo  $\varepsilon$  (23), onde possono riguardarsi come *omomorfismi di  $\mathcal{C}_\varepsilon$* . Inoltre, in  $\mathcal{C}_\varepsilon$  (come in  $\mathcal{C}$ ), gli omomorfismi in questione risultano *idempotenti* (24).

Siamo dunque in condizione di applicare il lemma L (con riferimento allo spazio vettoriale  $\mathcal{C}_\varepsilon$ ). Tenuta presente anche la (16) del n. 4, si perviene senza difficoltà alle (22), (23); (24), (25), cioè ai teoremi  $T_1, T_2, T_3, T_4$ .

## 9. Connessioni a campo $\mathcal{H}$ parallelo.

Si considerino ora su  $V$  le connessioni per le quali il *campo tensoriale  $\mathcal{H}$  della struttura quasi complessa (n. 2) risulta parallelo*. In altri termini, in ogni punto  $x$  di  $V$ , il tensore  $D_A h$ , ottenuto per derivazione covariante nella connessione (n. 6), risulta *nullo* (25).

Ciò premesso, sussistono alcuni *teoremi di rappresentazione*. Precisamente, indicata con  $\chi$  una arbitraria connessione simmetrica, con  $\Sigma, E$  arbitrari tensori di  $\mathcal{C}$ , simmetrico il primo, emisimmetrico il secondo, si ha

(22) Per la prima equazione si noti che se  $X \in \mathcal{C}_\varepsilon$  è  $X = \varepsilon(X)$ , onde, tenuto conto della (4) e della relazione  $\alpha\varepsilon = \sigma\varepsilon - \varepsilon\varepsilon = -\varepsilon$ , risulta:

$$\alpha W \alpha W (X) = W \alpha W \alpha (X) = W \alpha W \alpha \varepsilon (X) = -W \alpha W \varepsilon (X) = -W \alpha W (X).$$

(23) Si ricordi che la proprietà sussiste per  $Q$  e  $K$  (n. 4); inoltre si tenga presente la (4) ed il carattere involutorio di  $\alpha$ .

(24) Ciò segue subito dalla proprietà  $P_3$  del n. 4 e da una osservazione alla fine del n. 3.

(25) Vari Autori si sono interessati a questa classe di connessioni. Ved. p. es. K. YANO, [11]; ivi il tensore  $h$  è denotato con  $F$  e le connessioni di questo tipo sono chiamate *F*-connessioni.

$T_5$  — Le connessioni per le quali il campo  $\mathcal{H}$  è parallelo, sono, tutte e sole rappresentate, nel punto generico  $x$  di  $V$ , dalla

$$(31) \quad A = \chi + S(\chi) + \sigma W(E) + K(\Sigma) + K^*(E) + N.$$

$T_6$  — Le connessioni di MARTINELLI per le quali il campo  $\mathcal{H}$  è parallelo sono, tutte e sole, rappresentate, nel punto generico  $x$  di  $V$ , dalla

$$(32) \quad A = \chi + S(\chi) + N + Q(E).$$

Le dimostrazioni dei teoremi ora enunciati saranno date ai n. 10, 11. Conviene però notare subito che la (32) rientra come caso particolare sia nella (25), che nella (31). Invero ciò può stabilirsi direttamente ponendo  $\chi + S(\chi)$  in luogo di  $\Gamma$  ed  $N + K^*(E)$  in luogo di  $E$  nella (25); assumendo  $\Sigma = 0$  e ponendo  $Q(E)$  in luogo di  $E$  nella (31)<sup>(26)</sup>.

Sull'esistenza di connessioni delle due classi attualmente in considerazione, possono ripetersi le osservazioni che chiudono il n. 7, aggiungendo che come  $\Sigma$  potrà assumersi il tensore  $\sigma(D_{\Gamma}^{\sigma} h)$ .

## 10. Dimostrazioni.

Nell'intento di stabilire il teorema di rappresentazione  $T_5$ , conviene anzitutto ricordare che, in virtù di un risultato di V. MANGIONE, la classe di connessioni in considerazione è caratterizzata, in ogni punto  $x$  di  $V$ , dalle relazioni

$$(33) \quad R(A) = 0, \quad S(A) = 0 \quad (27).$$

La prima delle (33), in virtù di una nota relazione generale<sup>(28)</sup>, può sostituirsi con  $K(T_A) = N$  essendo  $N$  il tensore di NIJENHUIS nel punto  $x$  (n. 2) e  $T_A$  la torsione di  $A$  in  $x$  (n. 6). Si è così condotti a ricercare la più generale soluzione *emisimmetrica* (cioè in

<sup>(26)</sup> Si tengano presenti le proprietà formali degli omomorfismi  $K, Q$  (n. 4) e la relazione  $K(N) = N$ , che discende immediatamente dalle oss.  $O_9, O_6$  e dal teor.  $T_1$  del lavoro [6] di G. B. RIZZA.

<sup>(27)</sup> V. MANGIONE, 5, teor.  $T_3$ , p.

<sup>(28)</sup> Ved. p. es. V. MANGIONE, [5], formula (17).

$\mathcal{C}_\varepsilon$ ) dell'equazione

$$(34) \quad K(X) = N.$$

Ora, l'omomorfismo  $K$ , tenuto presente le proprietà  $P_3$  e la permutabilità con  $\varepsilon$  (n. 4), può riguardarsi come un *omomorfismo idempotente* di  $\mathcal{C}_\varepsilon$ , D'altro canto risulta  $K^*(N) = 0$  <sup>(29)</sup>. Dal lemma L del n. 8 segue dunque

$$(35) \quad X = N + K^*(E),$$

dove  $E$  è un arbitrario tensore emisimmetrico di  $\mathcal{C}$ .

Si consideri ora la seconda delle (33). Denotata al solito con  $\Gamma_A$  la connessione simmetrica associata a  $A$ , la (33) diviene

$$S(\Gamma_A) = -\sigma W(T_A) \text{ }^{(30)}.$$

Si è dunque condotti a ricercare la più generale connessione simmetrica  $\gamma$  soddisfacente alla relazione

$$(36) \quad S(\gamma) = -\sigma W(T_A),$$

con  $T_A$  dato dal secondo membro della (35).

A questo punto conviene premettere che le *connessioni simmetriche*  $\gamma_0$  per le quali risulta  $S(\gamma_0) = 0$  sono, tutte e sole, rappresentate nel punto  $x$  di  $V$ , da

$$(37) \quad \gamma_0 = \chi + S(\chi),$$

dove  $\chi$  è un'arbitraria connessione simmetrica.

Invero, tenuto conto del corollario  $C_1$  (n. 15) e dell'osservazione  $O_{13}$  (n. 10) del lavoro [6] di G. B. RIZZA, dalla (37) segue subito  $S(\gamma_0) = 0$ . Viceversa, posto  $\chi = \gamma_0 - K^*(\Sigma)$  con  $\Sigma$  arbitrario tensore simmetrico di  $\mathcal{C}$ , dal corollario  $C_1$  discende

$$S(\chi) - S(\gamma_0) = -KK^*(\Sigma) + K^*(\Sigma).$$

Poichè, per ipotesi è  $S(\gamma_0) = 0$  e risulta  $KK^* = 0$  (proprietà  $P_3$ , n. 4) segue  $K^*(\Sigma) = S(\chi)$ ; pertanto  $\gamma_0$  può scriversi nella forma (37). La proposizione è quindi dimostrata.

<sup>(29)</sup> Ved. p. es. G. B. RIZZA, [6]. Il risultato segue immediatamente da  $O_6, O_9, T_1$ .

<sup>(30)</sup> Basta tener presente la (20) del lavoro [6] di G. B. RIZZA.

Considerata ora una arbitraria connessione  $\gamma_0$  con la proprietà  $S(\gamma_0) = 0$ , in ogni punto  $x$  di  $V$  può scriversi

$$(38) \quad \gamma = \gamma_0 + \Sigma_0,$$

con  $\Sigma_0$  opportuno tensore simmetrico di  $\mathcal{C}$ .

Ciò premesso, la (36) diviene

$$S(\gamma) - S(\gamma_0) = -\sigma W(T_A).$$

D'altra parte il corollario  $C_1$  del lavoro [6] dà

$$S(\gamma) - S(\gamma_0) = K(\Sigma_0) - \Sigma_0,$$

In definitiva risulta

$$K^*(\Sigma_0) = \sigma W(T_A).$$

Indicato con  $\mathcal{C}_\sigma$  il sottospazio costituito dai *tensori simmetrici* di  $\mathcal{C}$ , si è dunque condotti a ricercare in  $\mathcal{C}_\sigma$  la più generale soluzione dell'equazione

$$(39) \quad K(Y) = \sigma W(T_A).$$

Ora  $K^* = I - K$  è un *omomorfismo idempotente* di  $\mathcal{C}_\sigma$  <sup>(31)</sup>. D'altra parte tenuto conto della (9) e dell'emisimmetria di  $T_A$ , risulta:

$$K\sigma W(T_A) = \sigma K W(T_A) = \sigma\alpha K(T_A) = \sigma K(T_A) = K\sigma(T_A) = 0.$$

È dunque possibile applicare il lemma L (con riferimento allo spazio vettoriale  $\mathcal{C}_\sigma$ ). Si ottiene

$$(40) \quad Y = \sigma W(T_A) + K(\Sigma),$$

essendo  $\Sigma$  un arbitrario tensore simmetrico di  $\mathcal{C}$ .

Occorre ora sostituire a  $T_A$  il secondo membro della (35).

Tenuta presente la (9) del n. 4 e l'emisimmetria di  $N$ , risulta:

$$\begin{aligned} \sigma W(T_A) &= \sigma W(N + K^*(E)) \\ &= \sigma W(N) + \sigma W(E) - \sigma W K(E) \\ &= -\sigma W\alpha(N) + \sigma W(E) - \sigma\alpha K(E). \end{aligned}$$

<sup>(31)</sup> Ciò è immediata conseguenza della permutabilità di  $K$  con  $\sigma$  e della proprietà  $P_3$  (n. 4).

Convieni qui ricordare che  $N$  soddisfa alla condizione  $\mathcal{B}_1$  (equivalente a  $\mathbf{B}_1$ ) (n. 3)<sup>(32)</sup> onde  $W\alpha(N) = N$ , e che  $K$  è permutabile con  $\sigma\alpha = \sigma$  (n. 4). Quindi essendo  $N$  ed  $E$  tensori emisimmetrici,  $\sigma W(T_A)$  si riduce semplicemente a  $\sigma W(E)$  e pertanto la (40) diviene

$$(41) \quad Y = \sigma W(E) + K(\Sigma)$$

con  $\Sigma$ ,  $E$  arbitrari in  $\mathcal{C}_\sigma$ ,  $\mathcal{C}_\varepsilon$  rispettivamente.

In conclusione, per una generica connessione della classe in considerazione, la connessione simmetrica associata è data dalla (38) con  $\gamma_0$ ,  $\Sigma_0$  espressi rispettivamente dai secondi membri delle (37), (41); mentre la torsione è data dal secondo membro della (35). Ciò conduce immediatamente alla (31) e pertanto il teorema  $\mathbf{T}_5$  è dimostrato.

11. Per stabilire il teorema  $\mathbf{T}_6$  conviene premettere che, in virtù di un risultato di V. MANGIONE<sup>(33)</sup> e della proprietà  $\mathbf{P}_5$  del n. 4, le connessioni che ora interessano sono caratterizzate nel punto generico  $x$  di  $V$ , da

$$(42) \quad S(\Gamma_A) = 0, \quad Q^*(T_A - N) = 0.$$

Si è già osservato al n. 8 che  $Q^*$  è un *omomorfismo idempotente* di  $\mathcal{C}_\varepsilon$ , quindi, per il Lemma **L**, la soluzione generale in  $\mathcal{C}_\varepsilon$ , dell'equazione  $Q^*(X) = 0$  è  $X = Q(E)$  con  $E$  arbitrario in  $\mathcal{C}_\varepsilon$ . Ne segue che l'espressione generale della torsione, nel caso attuale, è  $N + Q(E)$ . D'altra parte, in base ad una osservazione del n. 10, la più generale connessione simmetrica  $\Gamma_A$  per la quale sia  $S(\Gamma_A) = 0$  è data dal secondo membro della (37), dove  $\chi$  è una connessione simmetrica arbitraria.

In conclusione si perviene alla (32) e pertanto il teorema  $\mathbf{T}_6$  è dimostrato.

Una seconda dimostrazione del teor.  $\mathbf{T}_6$  può ottenersi utilizzando i teor.  $\mathbf{T}_4$ ,  $\mathbf{T}_5$ . Invero l'osservazione immediatamente successiva all'enunciato del teor.  $\mathbf{T}_6$  (n. 9) prova che le connessioni rappresentate nel punto generico  $x$  di  $V$  dalla (32) sono connessioni di MARTINELLI e che, per esse, il campo  $\mathcal{H}$  risulta parallelo.

<sup>(32)</sup> Ved. p. es. G. B. RIZZA, [6], Oss. 0<sub>9</sub>.

<sup>(33)</sup> V. MANGIONE, [5], teor.  $\mathbf{T}_4$ .

Inversamente, considerata una connessione con queste proprietà, essa, in virtù dei teor.  $T_4, T_5$ , nel punto  $x$  di  $V$ , è suscettibile sia di una rappresentazione del tipo (25) sia di una del tipo (31).

Il confronto tra le espressioni della torsione nelle due rappresentazioni conduce senza difficoltà a stabilire che la connessione, nel punto  $x$  ha necessariamente una rappresentazione del tipo (32) <sup>(34)</sup>.

## 12. Osservazioni.

È opportuno ricordare che, per le connessioni nelle quali il campo  $\mathcal{H}$  è parallelo, è nota un'altra formula di rappresentazione, di natura essenzialmente diversa da quella del teor.  $T_5$  del n. 9 <sup>(35)</sup>.

Precisamente denotata con  $C$  una connessione arbitraria, con  $D_c h$  il tensore di  $\mathcal{C}$  ottenuto da  $\mathcal{H}$  per derivazione covariante e con  $L$  un arbitrario tensore di  $\mathcal{C}$ , le connessioni in considerazione, nel punto  $x$  di  $V$ , sono rappresentate da

$$(43) \quad A = C - \frac{1}{2} \lambda (D_c h) + O(L),$$

dove  $\lambda$  è l'isomorfismo ausiliario considerato al n. 5 ed  $O$  è l'omomorfismo di  $\mathcal{C}$  definito da

$$(44) \quad O = \frac{1}{2} (I + W).$$

L'equivalenza delle rappresentazioni (31), (43) può stabilirsi direttamente dimostrando che la (43) è caso particolare della (31) e la (31) è, a sua volta, caso particolare della (43). Precisamente, denotate con  $I_c$  e  $T_c$ , rispettivamente, la connessione simmetrica e la torsione relativa a  $C$ , con un calcolo un pò lungo ma non dif-

<sup>(34)</sup> Occorre tener conto delle proprietà formali di  $K, Q$  (n. 4) e utilizzare il lemma del n. 8.

<sup>(35)</sup> Ved. K. YANO, [10] Ch. X, p. 228-9 e [11], ch. VI, formule (2.2), (2.3), (1.5); A. COSSU [8] formula (2.5).

facile si prova che ponendo nella (31):

$$\chi = \Gamma_c, \quad E = -N + T_c - \frac{1}{2} \varepsilon \lambda(D_c h) + \varepsilon O(L),$$

$$\Sigma = -\frac{1}{2} \sigma \lambda(D_c h) + \sigma O(L) - \sigma W(E) - S(\Gamma_c),$$

si perviene alla (43). Inversamente, scelta una arbitraria connessione simmetrica  $\chi$  e denotato con  $\Phi$  il tensore ottenuto da  $\chi$  e  $\Gamma_c$  per differenza, un calcolo un po' complicato mostra che, ponendo nella (43):

$$L = \frac{1}{2} \lambda(D_c h) + S(\Gamma_c) - T_c + K(\Phi) + K^*(E) + K(\Sigma) + N + \sigma W(E)$$

( $\Sigma, E$  arbitrari tensori di  $\mathcal{C}_\sigma, \mathcal{C}_\varepsilon$  rispettivamente) si giunge alla (31).

Infine, come si è accennato nell'introduzione, il teor.  $\mathbf{T}_6$  del n. 9, relativo alla classe di connessioni di MARTINELLI per le quali, il campo  $\mathcal{H}$  riesce parallelo, non differisce da un teorema di rappresentazione stabilito nel 1961 da A. COSSU. Invero, tenute presenti le definizioni di  $Q, R(\chi), S(\chi)$  (n. 4,6) e ricordando che può scriversi  $N = R(\chi)$ , la (32) si riduce immediatamente alla (2.27) del lavoro [3].



## BIBLIOGRAFIA

- [1] N. BOURBAKI *Algèbre* 3, Hermann Paris, (1958).
- [2] N. BOURBAKI, *Algèbre* 8, Hermann, Paris, (1958).
- [3] A. COSSU, *Connessioni che conservano una struttura quasi complessa*, Rend. Lincei, 30 (1961).
- [4] B. ECKMANN, *Cours sur les variétés complexes*, Centro Internazionale Matematico Estivo, C. I. M. E. Cremonese, Roma, (1956).
- [5] V. MANGIONE, *Su alcune classi di connessioni di una varietà quasi complessa*, Riv. Mat. Univ. Parma (2), 9, (1968).
- [6] G. B. RIZZA *Sulle connessioni di una varietà quasi complessa*, Ann. di Mat., (6), 68, (1965).
- [7] G. B. RIZZA, *Varietà quasi complesse e connessioni*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 35, (1965).
- [8] G. B. RIZZA, *Connessioni sulle varietà a struttura quasi complessa e quasi hermitiana*, VIII Congresso U. M. I., Trieste, (1967).
- [9] J. A. SCHOUTEN, *Ricci Calculus*, 2<sup>nd</sup> Ed., Springer, Berlin, (1954).
- [10] K. YANO, *The theory of LIE derivatives and its applications*. North Holland, Amsterdam, (1955).
- [11] K. YANO, *Differential Geometry of complex and almost complex spaces*. Pergamon Press, Oxford, (1965).