

# Sur l'Extrapolation des Signaux d'Énergie Finie à Bande Limitée

ANNE-LAURE CHARBONNIAUD

JEAN-FRANÇOIS CROUZET

ROGER GAY (\*)

SUMMARY. - *We show that both Papoulis' method and Aizenberg's method for extrapolating finite energy and band limited signals are related to each other, provided that the same setting is used to describe both methods. We study such a setting and give some examples we comment.*

RÉSUMÉ. - *On montre que les méthodes d'extrapolation de signaux d'énergie finie et à bande limitée de Papoulis et d'Aizenberg peuvent être reliées dans un cadre d'étude commun. On étudie ce cadre de travail et on donne quelques exemples commentés.*

## 1. Introduction

L'étude de l'extrapolation d'un segment connu  $f|_{[-\tau, \tau]}$ ,  $\tau > 0$ , d'un signal d'énergie finie  $f \in L^2(\mathbb{R})$  a été une question récurrente dans

---

(\*) Indirizzi degli Autori: A.-L. Charbonniaud: Laboratoire de Mathématiques Pures de l'Université de Bordeaux 1, 351, Cours de la Libération 33405 Talence France et CEA. C.E.S.T.A. S.I./I.S. B.P. n°2 33114 Le Barp (France). J.-F. Crouzet: Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'Université de Bordeaux 1, 351, Cours de la Libération 33405 Talence (France). R. Gay : Laboratoire de Mathématiques Pures de l'Université de Bordeaux 1, 351, Cours de la Libération 33405 Talence (France).

la littérature mathématique touchant au traitement du signal depuis plusieurs décades.

La résolution de ce problème a été importante aussi bien pour des raisons théoriques que pour des raisons pratiques. Il en est ainsi, par exemple, pour l'obtention d'une résolution spectrale aussi précise que possible d'un signal du type considéré qui est seulement mesuré sur un intervalle de temps très court. Cette situation apparaît concrètement dans les problèmes touchant aux radars et la littérature spécialisée mentionne bien d'autres exemples d'utilisation. On trouve un excellent résumé des connaissances concernant ce type de problèmes dans le récent livre de Hurt ([H]).

Différentes méthodes ([P], [S.P.], [G],  $\dots$ ), utilisant de près ou de loin les fonctions Prolates Sphéroidales, ont été proposées, résolvant les problèmes des deux points de vues, théoriques et pratiques, en établissant des procédés d'approximation de l'extrapolation. Il semble que, jusqu'à maintenant, l'une des méthodes les plus prometteuses, soit la méthode itérative de Gerchberg-Papoulis ([G], [P]). De nombreuses tentatives de régularisation ont été proposées, dont beaucoup sont examinées dans ([H]).

Mais, très récemment, L. Aizenberg ([A]), a proposé une nouvelle méthode d'approximation de l'extrapolation, utilisant les espaces de Hardy de fonctions holomorphes dans un demi-plan ouvert du plan complexe  $\mathbb{C}$ , basée sur des idées déjà anciennes de Carleman. Cette méthode, telle qu'elle est présentée dans ([A]), semble numériquement aussi instable que les méthodes du type Gerchberg-Papoulis. La raison est très certainement la présence de petits dénominateurs dans les formules d'extrapolation proposées par Aizenberg. Nos propres simulations, aussi bien que la lecture de ([A]), semblent indiquer des performances numériques comparables pour les deux types de méthodes.

Dans le présent travail, après un bref résumé de la méthode de Aizenberg, nous introduirons une nouvelle méthode d'extrapolation, basée sur les deux types de méthode que nous venons d'évoquer. Nous montrerons qu'une technique itérative, très semblable à celle de Gerchberg-Papoulis, est possible dans le cadre des espaces de Hardy utilisés par Aizenberg. Nous avons l'espoir que la robustesse des méthodes de variable complexe, aussi bien que l'introduction naturelle de certains paramètres, représentant des degrés de liberté, permettront d'optimiser les performances numériques après l'intro-

duction éventuelle de procédés de régularisation.

Ce travail de recherche nous a été proposé par le CEA/CESTA. Nous voulons remercier cet organisme pour son support matériel. Nous souhaitons aussi remercier les professeurs A. Sebbar et A. Yger pour quelques conversations fructueuses et MM. J. J. Bouquet et J. Gay qui ont été nos conseillers attentifs pour les simulations numériques que nous avons tentées. Enfin, nous remercions M. Cessenat(CEA) pour l'intérêt qu'il a manifesté pour notre travail.

## 2. Modification de la Methode de Aizenberg

Nous renvoyons à ([K]) pour les définitions et les propriétés usuelles de la transformation de Laplace  $\mathcal{L}$  entre les espaces de Hilbert  $L^2([0, +\infty[)$  des fonctions de carré intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  et l'espace de Hardy  $H^2(\Pi)$  où, comme usuellement,

$$\Pi = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\},$$

et

$$H^2(\Pi) = \left\{ g : \Pi \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphes : } \right. \\ \left. \|g\|_{H^2}^2 = \sup_{\sigma > 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |g(\sigma + i\tau)|^2 d\tau < +\infty \right\}.$$

En suivant L. Aizenberg ([A]), nous introduisons maintenant, pour  $\delta > 0$ , l'espace de Hilbert  $H_\delta^2$  des fonctions holomorphes dans

$$\Pi_\delta = \{\zeta \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(\zeta) > -\delta\}$$

par

$$H_\delta^2 = \left\{ \psi : \Pi_\delta \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphes : } \right. \\ \left. \|\psi\|_{H_\delta^2}^2 = \sup_{y > -\delta} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\psi(x + iy)|^2 dx < +\infty \right\}.$$

Le changement de variables  $z = i(\zeta - \delta)$  détermine une isométrie entre les espaces  $H_\delta^2$  et  $H^2(\Pi)$ . Chaque  $\psi \in H_\delta^2$  a une valeur au

bord  $t \in \mathbb{R} \mapsto \psi^*(t - i\delta)$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Pour  $Im(z) > -\delta$ , nous avons la relation

$$\psi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}} \psi^*(t - i\delta) \frac{dt}{t - i\delta - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty - i\delta}^{+\infty - i\delta} \psi^*(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \quad (1)$$

L'application  $\psi \mapsto \psi^* \in L^2(\mathbb{R})$  est une isométrie non surjective. Pour  $\sigma > 0$ , nous désignerons par  $L^2_{0,2\sigma}(\mathbb{R})$  le sous-espace des fonctions  $f \in L^2(\mathbb{R})$  telles que la transformée de Fourier  $\mathfrak{F}(f)$  de  $f$  a son support dans  $[0, 2\sigma]$ . Il s'agit de l'ensemble des signaux  $f$  d'énergie finie, à bande limitée par  $[0, 2\sigma]$ , que nous devons reconstruire d'après la seule connaissance de  $f|_{[-\tau, \tau]}$ , pour  $\tau > 0$  donné. Il est usuel que tout élément  $f \in L^2_{0,2\sigma}(\mathbb{R})$  possède le prolongement analytique suivant :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{F}^*(e^{-y\bullet} \mathfrak{F}(f)(\bullet))(x) \quad (z = x + iy \in \mathbb{C}). \quad (2)$$

(Comme usuellement, nous avons désigné par  $\mathfrak{F}$  et  $\mathfrak{F}^*$  les prolongements à  $L^2(\mathbb{R})$  des transformation de Fourier et transformation de Fourier inverse, définies sur  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  par les relations

$$\mathfrak{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\xi} dt \quad \text{et} \quad \mathfrak{F}^*(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{+it\xi} dt \quad ).$$

Il est aisé de voir que, pour toute  $f \in L^2_{0,2\sigma}(\mathbb{R})$ , on a les inégalités suivantes:

$$\|f\|_2^2 \leq 2\pi \|f\|_{H_\delta^2}^2 \leq e^{4\sigma\delta} \|f\|_2^2 \quad (3)$$

qui nous indiquent que les deux normes  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_{H_\delta^2}$  sur l'espace  $L^2_{0,2\sigma}(\mathbb{R})$  sont équivalentes.

Si  $x \in \mathbb{R}$  et  $\delta > 0$  sont donnés, la fonction  $C_{2\delta}(x)$  définie par

$$C_{2\delta}(x)(z) = \frac{1}{z - x + 2i\delta}, \quad z \in \Pi_\delta, \quad (4)$$

appartient à  $H_\delta^2$ , et l'on a  $\|C_{2\delta}(x)\|_{H_\delta^2}^2 = \frac{1}{2\delta}$ , ainsi que la relation

$$\psi(x) = \frac{1}{2i\pi} (\psi^*|_{C_{2\delta}(x)})_{H_\delta^2}, \quad \psi \in H_\delta^2, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Soit maintenant  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite de points deux à deux distincts de l'intervalle  $[-\tau, \tau]$ ,  $\tau > 0$ . Pour toute  $\psi \in H_\delta^2$  nous avons ([A])

$$\psi(z) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{1 \leq k \leq N} \psi(x_k) \omega_k^N(z), \quad (6)$$

au sens de la norme de l'espace de Hilbert  $H_\delta^2$ , avec

$$\omega_k^N(z) = \frac{2i\delta}{z - x_k + 2i\delta} \prod_{\substack{j \neq k \\ 1 \leq j \leq N}} \frac{(z - x_j)(x_k - x_j + 2i\delta)}{(z - x_j + 2i\delta)(x_k - x_j)}. \quad (7)$$

Afin de tenter d'éliminer l'instabilité numérique provoquée par la présence des petits dénominateurs dans (7) notre idée est de remplacer le balayage de  $[-\tau, \tau]$  dans  $H_\delta^2$  par  $x \mapsto C_{2\delta}(x)$  par celui de  $L^2([-\tau, \tau])$ , via  $\varphi \mapsto C_{2\delta}(\varphi)$ , où la fonction

$$C_{2\delta}(\varphi)(z) = \int_{-\tau}^{+\tau} \frac{\varphi(t)}{z - t + 2i\delta} dt \quad (8)$$

est holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus ([-\tau, \tau] - 2i\delta)$ , et donc aussi dans  $\Pi_\delta$ .

Le lemme suivant montre que  $C_{2\delta}(\varphi)$  est élément de  $H_\delta^2$ .

LEMME 2.1. *Pour toute  $\varphi \in L^2([-\tau, \tau])$ , la transformée de Cauchy modifiée  $C_{2\delta}(\varphi)$  est élément de  $H_\delta^2$ . On a l'inégalité*

$$\|C_{2\delta}(\varphi)\|_{H_\delta^2}^2 \leq \frac{\tau}{\delta} \|\varphi\|_{L^2([-\tau, \tau])}^2. \quad (9)$$

La valeur au bord  $C_{2\delta}^*(\varphi)$  de  $C_{2\delta}(\varphi)$  est  $t \mapsto C_{2\delta}(t - i\delta)$ .

*Preuve.* On a

$$\begin{aligned} & \sup_{y > -\delta} \int_{\mathbb{R}} |C_{2\delta}(\varphi)(s + iy)|^2 ds \\ &= \sup_{y > -\delta} \int \left| \int_{-\tau}^{+\tau} \frac{\varphi(x) dx}{s + iy - x + 2i\delta} \right|^2 ds \\ &\leq \sup_{y > -\delta} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{-\tau}^{+\tau} |\varphi(x)|^2 dx \right\} \left\{ \int_{-\tau}^{+\tau} \frac{dx}{(s-x)^2 + (y+2\delta)^2} \right\} ds \\ &\leq \|\varphi\|_{L^2([-\tau, \tau])}^2 \int_{-\tau}^{+\tau} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{ds}{(s-x)^2 + \delta^2} \right) dx \end{aligned}$$

d'où l'on déduit aisément l'inégalité du lemme.  $\diamond$

Nous allons maintenant donner quelques propriétés de l'opérateur  $C_{2\delta} : L^2([-\tau, \tau]) \rightarrow H_\delta^2$  qui nous seront utiles dans la suite.

**PROPOSITION 2.2.** *Pour toute  $\psi \in H_{2\delta}^2$  et toute  $\varphi \in L^2([-\tau, \tau])$  on a*

$$(\psi | C_{2\delta}(\varphi))_{H_\delta^2} = 2i\pi (R_\tau(\psi) | \varphi)_{L^2([-\tau, \tau])}, \quad (10)$$

où  $R_\tau$  est l'opérateur de restriction  $\psi \rightarrow \psi|_{[-\tau, \tau]}$  de  $H_\delta^2$  dans  $L^2([-\tau, \tau])$ .

*Preuve.* Nous partirons des égalités

$$\begin{aligned} (\psi | C_{2\delta}(\varphi))_{H_\delta^2} &= \int_{\mathbb{R}} \psi^*(t - i\delta) \overline{C_{2\delta}(\varphi)(t - i\delta)} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi^*(t - i\delta) \left\{ \int_{-\tau}^{\tau} \frac{\overline{\varphi(s)}}{t - s - i\delta} ds \right\} dt. \end{aligned}$$

Nous remarquons alors que

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi^*(t - i\delta)| \left\{ \int_{-\tau}^{\tau} \frac{|\varphi(s)|}{|t - s - i\delta|} ds \right\} dt < +\infty$$

puisque

$$\begin{aligned} &\int_{-\tau}^{\tau} |\varphi(s)| \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{|\psi^*(t - i\delta)|}{|t - s - i\delta|} dt \right\} ds \\ &\leq \int_{-\tau}^{\tau} |\varphi(s)| \left\{ \int_{\mathbb{R}} |\psi^*(t - i\delta)|^2 dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(t - s)^2 + \delta^2} dt \right\}^{1/2} ds \\ &\leq \pi \sqrt{\frac{2}{\delta}} \|\psi\|_{H_\delta^2} \|\varphi\|_{L^2([-\tau, \tau])}. \end{aligned}$$

Le théorème de Fubini donne alors

$$\begin{aligned} (\psi | C_{2\delta}(\varphi))_{H_\delta^2} &= \int_{-\tau}^{\tau} \overline{\varphi(s)} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi^*(t - i\delta)}{t - s - i\delta} dt \right\} ds \\ &= 2i\pi (R_\tau(\psi) | \varphi)_{L^2([-\tau, \tau])}. \end{aligned}$$

$\diamond$

**COROLLAIRE 2.3.** *L'opérateur  $C_{2\delta} : L^2([-\tau, \tau]) \rightarrow H_\delta^2$  est un opérateur borné, compact, injectif à image dense. L'opérateur adjoint  $C_{2\delta}^*$  est donné par*

$$C_{2\delta}^* = 2i\pi R_\tau \quad (\text{i.e. } C_{2\delta} = \frac{2\pi}{i} R_\tau^*).$$

*Preuve.* La continuité est une conséquence immédiate de l'inégalité (9) du lemme 2.1. L'injectivité peut-être établie ainsi: si  $C_{2\delta}(\varphi) = 0$  pour  $\varphi \in L^2([-\tau, \tau])$  alors, pour  $|z| > \tau + 2\delta$ , on a

$$C_{2\delta}(\varphi)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_{-\tau}^{\tau} \varphi(t) t^n dt \right) \frac{1}{(z + 2i\delta)^{n+1}} = 0,$$

ce qui montre que  $\varphi$  est la fonction nulle puisque tous ses moments sont nuls.

L'égalité  $C_{2\delta}^* = 2i\pi R_\tau$  découle de la proposition 2.2. On en déduit la densité de l'image de  $C_{2\delta}$  puisque l'adhérence de l'image est l'orthogonal du noyau de l'opérateur  $R_\tau$ , noyau qui est nul en vertu du principe du prolongement analytique.

Enfin, la compacité de l'opérateur  $C_{2\delta}$  est une conséquence du théorème de Montel, de la continuité de cet opérateur et de la remarque suivante: si  $\psi \in H_\delta^2$ , on dispose de l'inégalité

$$|\psi(z)| \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\|\psi\|_{H_\delta^2}}{\sqrt{\text{Im}(z) + \delta}}, \quad \text{Im}(z) > -\delta, \quad (11)$$

que l'on obtient en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\psi(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\mathbb{R}} |\psi^*(t - i\delta)| dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(t - x)^2 + (\delta + y)^2} dt \right\}^{1/2}$$

à l'intégrale de Cauchy

$$\psi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi^*(t - i\delta)}{t - z - i\delta} dt.$$

◇

COROLLAIRE 2.4. *Pour toutes  $\varphi, \vartheta \in L^2([-\tau, \tau])$  on a*

$$\begin{aligned} (C_{2\delta}(\varphi)|C_{2\delta}(\vartheta))_{H_\delta^2} &= 2i\pi(C_{2\delta}(\varphi)|\vartheta)_{L^2([-\tau, \tau])} \\ &= 2i\pi \int_{[-\tau, \tau]^2} \frac{\varphi(s)\overline{\vartheta(u)}}{u-s+2i\delta} dud s. \end{aligned} \quad (12)$$

*Preuve.* C'est un cas particulier de 2.2.  $\diamond$

REMARQUE 2.5. 1) L'opérateur  $R_\tau$  est à image dense car  $R_\tau^* = \frac{i}{2\pi}C_{2\delta}$  est injectif. 2) L'opérateur  $R_\tau$  dépend seulement de  $\delta$  à travers son domaine de définition, mais son adjoint  $R_\tau^* = \frac{i}{2\pi}C_{2\delta}$  montre cette dépendance dans son expression analytique. 3) Si  $\varphi = \vartheta$ , l'égalité (11) devient

$$\|C_{2\delta}(\varphi)\|_{H_\delta^2} = 2i\pi \int_{[-\tau, \tau]^2} \frac{\varphi(s)\overline{\varphi(u)}}{u-s+2i\delta} dud s. \quad (12)$$

Ces premières propriétés conduisent à un procédé numérique d'approximation de l'extrapolation qui est une modification immédiate de celui de L. Aizenberg décrit précédemment.

Considérons une base de Riesz (usuellement une base orthonormale)  $(\varphi_j)_{j \geq 1}$  de  $L^2([-\tau, \tau])$ .

Désignons par  $E_N$  (resp  $F_N$ ) le sous-espace de  $L^2([-\tau, \tau])$  (resp  $H_\delta^2$ ) engendré par  $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq N}$  (resp  $(C_{2\delta}(\varphi_j))_{1 \leq j \leq N}$ ). Puisque l'opérateur  $C_{2\delta}$  est injectif, les espaces  $E_N$  et  $F_N$  sont de dimension  $N$  et, si  $\pi_N : H_\delta^2 \rightarrow F_N$  et  $p_N : L^2([-\tau, \tau]) \rightarrow E_N$  sont les projections orthogonales, la densité de l'image de  $C_{2\delta}$  nous assure que, pour tout  $\psi \in H_\delta^2$ ,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|\psi - \pi_N(\psi)\|_{H_\delta^2} = 0. \quad (13)$$

Voici la description, utilisant les notations précédentes, de ce procédé basé sur la propriété (13):

PROPOSITION 2.6. *Soient  $(\varphi_j)_{j \geq 1}$  une base de Riesz de  $L^2([-\tau, \tau])$ ,  $\psi$  un élément de  $H_\delta^2$  et  $\varphi = \pi_N(\psi) = \sum_{1 \leq j \leq N} a_j^N C_{2\delta}(\varphi_j)$  la projection orthogonale de  $\psi$  sur le sous-espace  $F_N$  de  $H_\delta^2$  engendré par  $(C_{2\delta}(\varphi_j))_{1 \leq j \leq N}$ . Nous avons*



$$\begin{aligned}
1) \quad (R_\tau(\psi)|\varphi_j)_{L^2([-\tau,\tau])} &= \frac{1}{2i\pi}(\psi|C_{2\delta}(\varphi_j))_{H_\delta^2} \\
&= (R_\tau(\pi_N(\psi))|\varphi_j)_{L^2([-\tau,\tau])}
\end{aligned} \tag{14}$$

et

$$p_N \circ R_\tau = p_N \circ R_\tau \circ \pi_N.$$

2) Les coefficients  $a_j^N$ ,  $1 \leq j \leq N$ , sont solutions du système de Cramer

$$\overline{G_N} A_N = Y_N \tag{15}$$

avec

$$A_N = {}^t (a_1^N, \dots, a_N^N),$$

$$Y_N = 2i\pi {}^t \left( (R_\tau(\psi)|\varphi_1)_{L^2([-\tau,\tau])}, \dots, (R_\tau(\psi)|\varphi_N)_{L^2([-\tau,\tau])} \right),$$

et où  $G_N$  est la matrice de Gramm

$$G_N = \left( (C_{2\delta}(\varphi_i)|C_{2\delta}(\varphi_j))_{H_\delta^2} \right)_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq N}},$$

l'indice  $i$  étant l'indice des lignes et  $j$  celui des colonnes, et dans laquelle

$$(C_{2\delta}(\varphi_i)|C_{2\delta}(\varphi_j))_{H_\delta^2} = 2i\pi \int_{[-\tau,\tau]^2} \frac{\varphi_i(s)\overline{\varphi_j(u)}}{u-s+2i\delta} duds. \tag{16}$$

Les éléments connus  $Y_N$  et  $G_N$  de ce système de Cramer n'utilisent que la connaissance des données sur  $[-\tau, \tau]$ . 3) La suite  $(\pi_N(\psi))_{N \geq 1}$  converge vers  $\psi$  uniformément sur tout ensemble de la forme  $\{\zeta \in \mathbb{C} : \text{Im}(\zeta) \geq \mu > -\delta\}$  et, en particulier, sur  $\mathbb{R}$ . La suite des restrictions  $(\pi_N(\psi)|_{\mathbb{R}})_{N \geq 1}$  converge vers  $\psi|_{\mathbb{R}}$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

*Preuve.* On écrit d'abord que  $\psi - \varphi$  est orthogonal à  $F_N$  en exprimant que, pour  $1 \leq j \leq N$ ,

$$(\psi - \varphi|C_{2\delta}(\varphi_j))_{H_\delta^2} = 2i\pi (R_\tau(\psi - \varphi)|\varphi_j)_{L^2([-\tau,\tau])} = 0,$$

ce qui donne les relations (14). Celles-ci induisent les égalités

$$\begin{aligned} 2i\pi(R_\tau(\psi)|\varphi_j)_{L^2([- \tau, \tau])} &= ((\psi|C_{2\delta}(\varphi_j))_{H_\delta^2} \\ &= (\varphi|C_{2\delta}(\varphi_j))_{H_\delta^2} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq N} a_k^N (C_{2\delta}(\varphi_k)|C_{2\delta}(\varphi_j))_{H_\delta^2}, \end{aligned}$$

pour  $1 \leq j \leq N$ , ce qui n'est autre que le système (15). Enfin, le troisième point est une conséquence de l'inégalité (11).  $\diamond$

### 3. Le schéma de Papoulis dans le cadre des espaces de Hardy $H_\delta^2$

Nous rappellerons d'abord brièvement le schéma itératif de Papoulis-Gerchberg. Considérons l'espace de Hilbert  $H = L^2(\mathbb{R})$ ,  $I_1$  l'injection canonique du sous-espace  $H_1 = L_{0,2\sigma}^2(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ ,  $I_2$  l'injection canonique du sous-espace  $H_2 = L^2([- \tau, \tau])$  de  $L^2(\mathbb{R})$ , via l'application qui à  $\varphi \in H_2$  associe son prolongement par zéro. Soient  $P_1 : H \rightarrow H_1$ ,  $P_2 : H \rightarrow H_2$ ,  $Q_1 : H \rightarrow H_1^\perp$  et  $Q_2 : H \rightarrow H_2^\perp$  les projections orthogonales. La restriction  $\beta = P_2 \circ I_1$  de  $P_2$  au sous-espace  $H_1 = L_{0,2\sigma}^2(\mathbb{R})$  a pour adjoint  $\beta^* = P_1 \circ I_2$  et l'opérateur  $\beta^* \beta$  a pour expression analytique

$$\beta^* \beta(f)(x) = \int_{-\tau}^{\tau} e^{i\sigma(x-t)} \frac{\sin \sigma(x-t)}{\pi(x-t)} f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}, f \in H_1. \quad (17)$$

Afin de résoudre le problème de l'extrapolation de  $P_2 I_1(f) = f|_{[- \tau, \tau]}$ , on peut utiliser le système singulier de l'opérateur  $\beta$  ou bien la méthode des projections alternées sur des ensembles convexes, ici  $H_1$  et  $H_2$ , ce qu'illustre le dessin classique suivant (figure 1).

Cette méthode itérative, qui dérive de l'égalité

$$f = g + Q_2 P_1(f), \quad (18)$$

est convergente ([P]), et peut être traitée selon les méthodes de régularisation, ce qui conduit à des tests d'arrêt utilisables en présence de bruit ([D,DM],...).

Nous allons maintenant décrire cet algorithme, sous une forme à partir de laquelle il sera possible de le modifier en tenant compte de notre paramètre  $\delta$ , ce qui nous permettra d'introduire ce schéma itératif dans le cadre des espaces de Hardy.

Considérons l'opérateur  $B_0 : H_1 \rightarrow H_1$  défini par

$$B_0(\varphi) = \varphi + (\beta^* \beta) = \varphi + P_1 P_2 (f - \varphi) \quad \varphi \in H_1 \quad (19)$$

où  $f \in H_1$  est un élément fixé dont on connaît seulement  $f|_{[-\tau, \tau]}$ .

L'opérateur  $\beta^* \beta = P_1 P_2 = P_1 I_2 P_2 I_1$  est, comme on le voit à l'aide de son expression analytique, compact et auto-adjoint. Il est aussi injectif comme conséquence du lemme que voici que nous utiliserons plus loin:

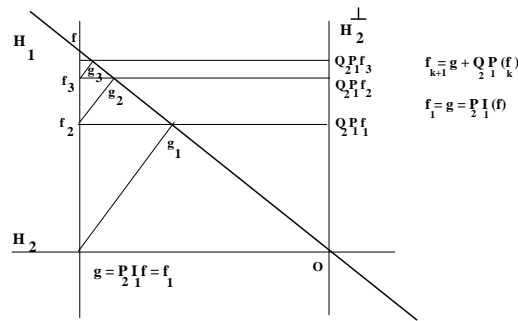


Figure 1

LEMME 3.1. *Le sous-espace  $R_\tau(L^2_{0,2\sigma}(\mathbb{R})) = P_2(L^2_{0,2\sigma}(\mathbb{R}))$  des restrictions à  $[-\tau, \tau]$  des éléments de  $L^2_{0,2\sigma}(\mathbb{R})$  est dense dans  $L^2([-\tau, \tau])$ .*

*Preuve.* Soit  $f \in L^2([-\tau, \tau])$  une fonction orthogonale à  $R_\tau(L^2_{0,2\sigma}(\mathbb{R}))$ . Pour toute  $g = \mathfrak{F}^*(\varphi)$ , et toute  $\varphi \in L^2([0, 2\sigma])$ , nous avons

$$0 = \int_{-\tau}^{\tau} f(t) \overline{g(t)} dt = \int_0^{2\sigma} \mathfrak{F}(f)(\xi) \overline{\varphi(\xi)} d\xi.$$

Il en résulte immédiatement que  $\mathfrak{F}(f)(\xi) = 0$  pour tout  $\xi \in [0, 2\sigma]$  et que  $f = 0$ , puisque cette fonction est une fonction entière.  $\diamond$

Ainsi, si  $\varphi \in H_1 = L^2_{0,2\sigma}(\mathbb{R})$  est telle que  $P_1 P_2(\varphi) = 0$ , alors  $P_2(\varphi) \in L^2([-\tau, \tau])$  est orthogonal à l'ensemble des restrictions à

$[-\tau, \tau]$  de tous les éléments de  $H_1$ . Il résulte alors du lemme 3.1 que  $P_2(\varphi) = 0$ , et donc que  $\varphi = 0$  d'après le principe du prolongement analytique.

Pour continuer, nous observerons maintenant que le seul point fixe possible de l'opérateur  $B_0$  est  $f$ . En effet, si  $\varphi \in H_1$  est tel que  $\varphi = B_0(\varphi) = \varphi + P_1P_2(f - \varphi)$ , alors  $P_1P_2(f - \varphi) = 0$  et  $\varphi = f$ .

Si nous considérons à présent le schéma itératif

$$\begin{cases} g_{n+1} &= B_0(g_n) \\ g_0 &= P_1P_2(f) = \beta^*\beta(f), \end{cases} \quad (20)$$

nous obtenons l'expression explicite

$$g_n = \left( Id_{H_1} - (Id_{H_1} - P_1P_2)^{n+1} \right)(f). \quad (21)$$

Ainsi, la convergence de  $g_n$  vers  $f$  sera prouvée si l'on montre que  $\| (Id_{H_1} - P_1P_2)^{n+1}(f) \|_2$  tend vers zéro lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Pour cette preuve Papoulis ([P]) utilise une base orthonormée  $(\varphi_n^o)_{n \geq 0}$  de  $H_1 = L_{0,2\sigma}(\mathbb{R})$ , avec  $\varphi_n^o(t) = e^{i\sigma t} \psi_n^o(t)$ , où  $\psi_n^o$  est la  $n$ -ième fonction Prolate Sphéroidale associée au couple  $(\tau, \sigma)$  ([P], [S.P.]). Rappelons que cette suite de fonction vérifie

- 1)  $\int_{-\tau}^{\tau} \psi_n^o(s) \frac{\sin \sigma(t-s)}{\pi(t-s)} ds = \lambda_n^o \psi_n^o(t)$ ,
- 2)  $1 > \lambda_0^o > \lambda_1^o > \dots > \lambda_n^o \dots \rightarrow 0$  avec  $n \rightarrow +\infty$ ,
- 3)  $(\psi_p^o | \psi_q^o)_{L^2(\mathbb{R})} = \delta_{p,q}$  et  $(\psi_n^o)_{n \geq 0}$  base orthonormale de  $L_{-\sigma, \sigma}^2(\mathbb{R})$ ,
- 4)  $\int_{-\tau}^{\tau} \psi_p^o(s) \psi_q^o(s) ds = \lambda_p^o \delta_{p,q}$ .

Il suit de ces propriétés que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \lambda_n^o \varphi_n^o(t) &= \lambda_n^o e^{i\sigma t} \psi_n^o(t) = e^{i\sigma t} \int_{-\tau}^{\tau} \psi_n^o(s) \frac{\sin \sigma(t-s)}{\pi(t-s)} ds \\ &= \int_{-\tau}^{\tau} e^{i(t-s)\sigma} \varphi_n^o(s) \frac{\sin \sigma(t-s)}{\pi(t-s)} ds \\ &= P_1P_2(\varphi_n^o)(t). \end{aligned}$$

Comme toute  $f \in L_{0,2\sigma}^2(\mathbb{R})$  peut-être écrite  $\sum_{k \geq 0} a_k \varphi_k^\circ$  on trouve que

$$(Id_{H_1} - P_1 P_2)^{n+1}(f) = \sum_{k \geq 0} a_k (1 - \lambda_k^\circ)^{n+1} \varphi_k^\circ, \quad (22)$$

et la preuve donnée par Papoulis en résulte.

Ayant ainsi rappelé l'essentiel de la méthode itérative sur laquelle nous nous appuyerons, nous allons présenter maintenant son extension dans le contexte des espaces de Hardy en introduisant, pour chaque  $\delta > 0$ , l'opérateur

$$B_\delta : L_{0,2\sigma}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L_{0,2\sigma}^2(\mathbb{R}) \quad (23)$$

dont la construction utilisera la transformation de Cauchy modifiée  $C_{2\delta} : L^2([-\tau, \tau]) \longrightarrow H_\delta^2$  et ses propriétés.

Désignons par  $i_\sigma^\delta$  l'injection canonique de  $L_{0,2\sigma}^2(\mathbb{R})$  dans  $H_\delta^2$  dont l'opérateur adjoint est  $\Pi_\sigma^\delta$ , projection orthogonale de  $H_\delta^2$  sur le sous-espace fermé  $L_{0,2\sigma}^2(\mathbb{R})$  de  $H_\delta^2$  (fermé car ce sous-espace est complet et les deux normes de  $H_\delta^2$  et de  $L^2(\mathbb{R})$  sont, comme nous l'avons vu, équivalentes sur ce sous-espace).

Considérons maintenant l'opérateur  $\alpha_\sigma^\delta$  de  $L_{0,2\sigma}(\mathbb{R})$  dans  $L^2([-\tau, \tau])$  défini par

$$\alpha_\sigma^\delta = R_\tau \circ i_\sigma^\delta \quad (24)$$

où, comme précédemment,  $R_\tau : H_\delta^2 \longrightarrow L^2([-\tau, \tau])$  est l'opérateur de restriction (qui induit  $P_2$  lorsqu'on le restreint à  $L_{0,2\sigma}^2(\mathbb{R})$  muni de la norme de  $L^2(\mathbb{R})$ ). Quoique  $\alpha_\sigma^\delta$  ne dépende de  $\delta$  que par son espace de définition, son adjoint  $(\alpha_\sigma^\delta)^*$  montre explicitement cette dépendance dans son expression analytique puisque

$$(\alpha_\sigma^\delta)^* = \Pi_\sigma^\delta \circ R_\tau^* = -\frac{1}{2i\pi} \Pi_\sigma^\delta \circ C_{2\delta} \quad (25)$$

et

$$(\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta = -\frac{1}{2i\pi} \Pi_\sigma^\delta \circ C_{2\delta} \circ R_\tau \circ i_\sigma^\delta \quad (26)$$

Nous définirons alors l'opérateur  $B_\delta : L_{0,2\sigma}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L_{0,2\sigma}^2(\mathbb{R})$  par la convention

$$B_\delta(\varphi) = \varphi + (\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta(f - \varphi) \quad \varphi \in L_{0,2\sigma}^2(\mathbb{R}), \quad (27)$$

et nous remarquerons que, tout comme  $B_0$ , sa définition ne nécessite que la connaissance de  $f|_{[-\tau, \tau]}$ .

Nous allons prouver maintenant la relation

$$(\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta(\varphi)(z) = P_1 P_2(\varphi)(z + 2i\delta) \quad \varphi \in L_{0, 2\sigma}^2(\mathbb{R}) \quad (28)$$

qui donne une expression concrète, liée au prolongement analytique de  $P_1 P_2(\varphi)$ .

Remarquons que  $\lim_{\delta \rightarrow 0} B_\delta(\varphi) = B_0(\varphi)$ , au moins uniformément sur tout compact.

Remarquons également qu'il serait intéressant de répondre aux questions suivantes : Pour  $f \in L_{0, 2\sigma}^2(\mathbb{R})$  donnée, dont on connaît seulement  $f|_{[-\tau, \tau]}$ , peut-on trouver un  $\delta > 0$  optimal pour le schéma itératif associé à  $B_\delta$ ? Dans quelle mesure un tel  $\delta > 0$  optimal peut-il être indépendant de la donnée  $f$ ?

Pour atteindre le but proposé nous explicitons dans ce qui suit quelques propriétés de l'opérateur:

$$A_\sigma^\delta = -2i\pi(\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta = \Pi_\sigma^\delta \circ C_{2\delta} \circ R_\tau \circ i_\sigma^\delta \quad (29)$$

**PROPOSITION 3.2.** *Pour toute  $\varphi \in H_\delta^2$  on a l'expression explicite*

$$\begin{aligned} & (\Pi_\sigma^\delta \circ C_{2\delta} \circ R_\tau)(\varphi)(z) \\ &= -2i \int_{-\tau}^{\tau} e^{i\sigma((z+2i\delta)-u)} \frac{\sin \sigma((z+2i\delta)-u)}{(z+2i\delta)-u} \varphi(u) du, \end{aligned} \quad (30)$$

qui n'utilise que la connaissance de  $\varphi$  sur  $[-\tau, \tau]$ .

*Preuve.* Rappelons que  $F(z) \in H_\delta^2$  correspond isométriquement à  $\tilde{F}(\zeta) = F(i(\zeta - \delta)) \in H^2(\Pi)$  (i.e  $F(z) = \tilde{F}(\delta - iz)$ ) et que la transformation de Laplace  $\mathfrak{L} : f \in L^2(\mathbb{R}) \mapsto \mathfrak{L}(f) \in H^2(\Pi)$  est aussi une isométrie. En composant ces deux isométries, on en construit une troisième, bijective,  $L : L^2([0, +\infty[) \rightarrow H_\delta^2$  définie par

$$L(f)(z) = \mathfrak{L}(f)(\delta - iz) = \int_0^{+\infty} e^{-t\delta} f(t) e^{itz} dt. \quad (31)$$

La projection orthogonale  $p_\sigma$  de  $L^2([0, +\infty[)$  sur  $L^2([0, 2\sigma])$ , qui est  $f \mapsto \chi_{[0, 2\sigma]} f$ , induit la projection orthogonale  $\Pi_\sigma^\delta : H_\delta^2 \rightarrow L_{0, 2\sigma}^2(\mathbb{R})$ .

Cet opérateur peut-être considéré comme l'opérateur transmué de l'opérateur  $p_\sigma$  par l'application  $L$ . Si  $f \in L^2([0, 2\sigma])$  et si  $x \in \mathbb{R}$ , nous avons

$$L(f)(x) = \int_0^{2\sigma} e^{-i\delta} f(t) e^{itx} dt = \mathfrak{F}^*(e^{-\delta \bullet} f)(x), \quad (32)$$

qui est un élément de  $L^2_{0,2\sigma}(\mathbb{R})$ , prolongeable en la fonction entière  $L(f)(z)$  obtenue en remplaçant  $x$  par  $z$  dans l'expression (32).

Puisqu'une isométrie préserve l'orthogonalité nous pouvons écrire que  $\Pi_\sigma^\delta \circ L = L \circ p_\sigma$ , ce qui veut dire aussi que l'image par  $\Pi_\sigma^\delta$  de la fonction  $g(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t\delta} f(t) e^{itz} dt$  est la fonction

$$L(\chi_{[0,2\sigma]} f)(z) = \int_0^{2\sigma} e^{-t\delta} f(t) e^{itz} dt. \quad (33)$$

Puisque  $g = \mathfrak{F}^*(e^{-\delta \bullet} f)$  on peut voir que

$$\Pi_\sigma^\delta(g)(z) = \mathfrak{F}^*(\chi_{[0,2\sigma]}(e^{-\delta \bullet} f))(z) = \left( e^{i\sigma \bullet} \frac{\sin \sigma \bullet}{\pi \bullet} \star g \right)(z), \quad (34)$$

soit encore

$$\Pi_\sigma^\delta(g)(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\sigma(z-s)} \frac{\sin \sigma(z-s)}{\pi(z-s)} g(s) ds. \quad (35)$$

Ceci est l'expression de  $\Pi_\sigma^\delta$ , prolongeant  $P_2$ , dans laquelle  $\delta$  n'apparaît pas.

Maintenant, si

$$g(z) = (C_{2\delta} \circ R_\tau)(\varphi)(z) = \int_{-\tau}^{\tau} \frac{\varphi(u)}{z - u + 2i\delta} du,$$

le théorème de Fubini nous donne

$$\begin{aligned} & (\Pi_\sigma^\delta C_{2\delta} R_\tau)(\varphi)(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{-\tau}^{\tau} \frac{\varphi(u)}{s-u+2i\delta} du \right) e^{i\sigma(z-s)} \frac{\sin \sigma(z-s)}{\pi(z-s)} ds \\ &= \int_{-\tau}^{\tau} \varphi(u) \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\sigma(z-s)} \sin \sigma(z-s)}{\pi(z-s)(s-u+2i\delta)} ds \right\} du. \end{aligned}$$

Un calcul élémentaire, utilisant la formule de Cauchy, permet d'évaluer l'intégrale entre crochets. Sa valeur est

$$-2ie^{i\sigma(z-u+2i\delta)} \frac{\sin \sigma(z-u+2i\delta)}{\pi(z-u+2i\delta)}, \quad (36)$$

ce qui permet d'achever la preuve du lemme.  $\diamond$

**COROLLAIRE 3.3.** 1) Pour toute  $\varphi \in H_\xi^2$ , on a

$$\Pi_\sigma C_{2\delta} R_\tau(\varphi)(z) = -2i\pi P_1 P_2(\varphi)(z+2i\delta), \quad z \in \mathcal{C}, \quad (37)$$

où  $P_1 P_2(\varphi)$  est le prolongement analytique de  $R_\tau(\varphi) = P_2(\varphi|_{\mathbb{R}})$  sur  $L_{0,2\sigma}(\mathbb{R})$  considéré comme un sous-espace de  $L^2(\mathbb{R})$ .

2) Pour toute  $\varphi \in L_{0,2\sigma}^2(\mathbb{R})$  on a

$$((\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta)(\varphi)(z) = P_1 P_2(\varphi)(z+2i\delta), \quad z \in \mathcal{C}. \quad (38)$$

*Preuve.* Elle est une conséquence immédiate du fait bien connu suivant: la projection orthogonale  $P_1 : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L_{0,2\sigma}^2(\mathbb{R})$  est l'application

$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{i\sigma(t-s)} \frac{\sin \sigma(t-s)}{\pi(t-s)} f(s) ds.$$

$\diamond$

**LEMME 3.4.** 1) L'opérateur  $(\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta = -\frac{1}{2i\pi} \Pi_\sigma^\delta \circ C_{2\delta} \circ R_\tau \circ i_\sigma^\delta$  est un opérateur auto-adjoint, compact et injectif.

2) Pour  $f \in L_{0,2\sigma}^2(\mathbb{R})$  donnée (et seulement connue par  $f|_{[-\tau,\tau]}$ ), l'opérateur  $B_\delta : \varphi \mapsto \varphi + ((\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta)(f - \varphi)$ , de l'espace  $L_{0,2\sigma}^2(\mathbb{R})$  dans lui-même, a un unique point fixe égal à  $f$ .



*Preuve.* L'opérateur  $(\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta$  est auto-adjoint d'après sa définition, compact d'après son expression analytique. Enfin, s'il annule  $\varphi$  l'expression (38) montre immédiatement que  $P_1 P_2(\varphi) = 0$  ce qui donne  $\varphi = 0$  puisque que l'on sait que  $P_1 P_2$  est injectif.  $\diamond$

Ces remarques étant faites nous allons définir et utiliser le schéma itératif

$$\begin{cases} g_{n+1} &= B_\delta(g_n) \\ g_0 &= ((\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta)(f), \end{cases} \quad (39)$$

pour lequel nous avons

$$g_n = \left( Id_{L^2_{0,2\sigma}(\mathbb{R})} - (Id_{L^2_{0,2\sigma}(\mathbb{R})} - (\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta)^{n+1} \right)(f) \quad (40)$$

Pour prouver la convergence de ce schéma nous allons considérer la suite  $(\lambda_n^\delta, \varphi_n^\delta)_{n \geq 0}$ , où  $(\lambda_n^\delta)_{n \geq 0}$  est la suite décroissante des valeurs propre de l'opérateur auto-adjoint injectif et compact  $(\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta$

$$\lambda_0^\delta \geq \lambda_1^\delta \geq \dots \lambda_n^\delta \dots \longrightarrow 0 \text{ avec } n \longrightarrow +\infty, \quad (41)$$

et où  $(\varphi_n^\delta)_{n \geq 0}$  est une base orthonormée de  $L^2_{0,2\sigma}(\mathbb{R})$  formée avec les fonctions propres correspondantes. La preuve de la convergence consistera à reproduire la preuve de la convergence du schéma originel de Papoulis rappelée précédemment (cf.(22)). Nous sommes en effet en mesure de montrer que  $\lambda_0^\delta < 1$  ce qui est le point qui assure cette convergence:

**LEMME 3.5.** *La plus grande valeur propre  $\lambda_0^\delta$  de l'opérateur  $(\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta$  vérifie*

$$\lambda_0^\delta \leq \lambda_0^0 < 1 \quad (42)$$

*Preuve.* Nous considérons que l'espace  $L^2_{0,2\sigma}(\mathbb{R})$  est un sous-espace de  $L^2(\mathbb{R})$  et nous le munirons de la norme correspondante de façon à avoir

$$\lambda_0^\delta = \sup\{((\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta)(\varphi) | \varphi\}_{L^2(\mathbb{R})} : \|\varphi\|_2 = 1\}. \quad (43)$$

D'après Slepian-Pollak ([S. P.]) nous savons que  $\lambda_0^0 < 1$ . L'inégalité (42) est une conséquence de  $(\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta = T_{2\delta} \circ (P_1 P_2)$ , où  $T_{2\delta}$  est l'application linéaire de  $L^2_{0,2\sigma}(\mathbb{R})$  dans lui-même définie par

$$T_{2\delta}(\psi)(z) = \psi(z + 2i\delta), \quad (44)$$

pour laquelle on a  $\|T_{2\delta}(\psi)\|_2 \leq \|\psi\|_2$ , puisque l'égalité de Parseval nous donne

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi(x + 2i\delta)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\sigma} |\mathfrak{F}(\psi)(\xi)|^2 e^{-4\delta\xi} d\xi \leq \|\psi\|_2^2. \quad (45)$$

◇

REMARQUE 3.6. 1) Décrire explicitement, ou même seulement donner quelques précisions concernant le système singulier  $(\lambda_n^\delta, \varphi_n^\delta)_{n \geq 0}$  de l'opérateur  $\alpha_\sigma^\delta$  est un problème sans doute ouvert qui est, nous semble-t-il, particulièrement intéressant. Lorsque  $\delta = 0$ , on trouve le système des fonctions Prolates Sphéroïdales. Pour ce système, on connaît l'existence d'un opérateur différentiel du second ordre, auto-adjoint, qui commute avec l'opérateur intégral

$$A(f)(t) = \int_{-\tau}^{\tau} \frac{\sin \sigma(t-s)}{\pi(t-s)} f(s) ds, \quad (46)$$

sur lequel on s'appuie pour effectuer l'étude du système des fonctions Prolates.

Nous n'avons pas pu trouver un tel opérateur, même de degré supérieur à deux, dans le cas  $\delta > 0$ . Le lecteur pourra trouver plus de détail sur ce point dans ([B.G.],[S.P.]).

Il nous semblerait aussi intéressant de décrire la dépendance du système  $(\lambda_n^\delta, \varphi_n^\delta)_{n \geq 0}$  en fonction de  $\delta$ .

2) L'appendice (B) est consacrée à quelques exemples élémentaires illustrant le procédé de Papoulis dans le cadre des espaces  $H_\delta^2$ .

#### 4. Schéma itératif avec paramètre complexe

Une idée vraiment simple, peut-être naïve, que nous n'avons pas vue dans la littérature, mais qui devrait sans doute s'y trouver étant donné son naturel, consiste en l'introduction d'un paramètre spectral conduisant à l'étude de l'opérateur  $Id - i\lambda(\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta$  pour  $(i\lambda)^{-1} \notin \{\lambda_k^\delta, k \geq 0\}$  et, en particulier, pour  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Dans ce paragraphe nous nous contenterons de faire quelques commentaires élémentaires sur cette approche du problème d'extrapolation. On

pourra trouver quelques résultats numériques sur cette approche du problème d'extrapolation considéré.

Nous ferons d'abord la remarque suivante : les opérateurs  $Id - i\lambda P_1 P_2$  et  $Id - i\lambda(\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta$ , de  $L_{0,2\sigma}^2(\mathbb{R})$  dans lui-même, sont inversibles. Ceci est une conséquence de la compacité des opérateurs  $i\lambda P_1 P_2$  et  $i\lambda(\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta$  et de l'injectivité des opérateurs  $Id - i\lambda P_1 P_2$  et  $Id - i\lambda(\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta$ , qui peut se voir comme conséquence des relations suivantes, valables respectivement pour  $f \in L_{0,2\sigma}^2(\mathbb{R})$  et  $g \in H_\delta^2$  :

$$\begin{aligned} \|f - i\lambda P_1 P_2(f)\|_2^2 &= \|f\|_2^2 + \lambda^2 \|P_1 P_2(f)\|_2^2 \\ \|g - i\lambda(\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta(g)\|_{H_\delta^2}^2 &= \|g\|_{H_\delta^2}^2 + \lambda^2 \|(\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta(g)\|_{\delta^2}^2 \end{aligned} \quad (47)$$

Par ailleurs, les valeurs propres de ces opérateurs sont  $((1 - i\lambda\lambda_k^0))_{k \geq 0}$  et  $((1 - i\lambda\lambda_k^\delta))_{k \geq 0}$  respectivement. Finalement, pour une  $f \in L_{0,2\sigma}^2(\mathbb{R})$  donnée, et seulement connue sur  $[-\tau, \tau]$ , les opérateurs  $B_{0,\lambda}$  et  $B_{\delta,\lambda}$  définis par

$$\begin{aligned} B_{0,\lambda}(\varphi) &= \varphi + i\lambda P_1 P_2(f - \varphi), \quad \varphi \in L_{0,2\sigma}^2(\mathbb{R}), \delta = 0, \\ B_{\delta,\lambda}(\varphi) &= \varphi + i\lambda(\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta(f - \varphi), \varphi \in L_{0,2\sigma}^2(\mathbb{R}), \delta > 0. \end{aligned} \quad (48)$$

ne sont pas contractants (cf (47)), et nous remplacerons les schémas itératifs associés, qui sont respectivement

$$g_{n+1} = (Id - i\lambda P_1 P_2)g_n + i\lambda P_1 P_2(f) \quad (49)$$

et

$$g_{n+1} = (Id - i\lambda(\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta)g_n + i\lambda(\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta(f) \quad (50)$$

par les nouveaux schémas correspondants aux inverses et qui, eux aussi, ont  $f$  comme seul point fixe:

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= (Id - i\lambda P_1 P_2)^{-1}h_n + \\ &\quad - (Id - i\lambda P_1 P_2)^{-1}(i\lambda P_1 P_2(f)) \end{aligned} \quad (51)$$

et

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= (Id - i\lambda(\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta)^{-1}h_n + \\ &\quad - (Id - i\lambda(\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta)^{-1}(i\lambda(\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta(f)). \end{aligned} \quad (52)$$

Ces nouveaux schémas sont convergents: par exemple, si  $\varphi \in L^2_{0;2\sigma}(\mathbb{R})$  peut-être écrite  $\varphi = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^\circ \varphi_k^\circ$ , avec convergence dans  $L^2(\mathbb{R})$  (cf (22)), nous avons

$$(Id - i\lambda P_1 P_2)(\varphi) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^\circ (1 - i\lambda \lambda_k^\circ) \varphi_k^\circ \quad (53)$$

et

$$\| (Id - i\lambda P_1 P_2)(\varphi) \|_2^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k^\circ|^2 (1 + (\lambda \lambda_k^\circ)^2). \quad (54)$$

L'opérateur  $E_{0,\lambda} = (Id - i\lambda P_1 P_2)^{-1}$  n'est autre que

$$\varphi \longrightarrow E_{0,\lambda}(\varphi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1 - i\lambda \lambda_k^\circ} a_k^\circ \varphi_k^\circ, \quad (55)$$

qui vérifie

$$\| E_{0,\lambda}(\varphi) \|_2^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1 + (\lambda \lambda_k^\circ)^2} |a_k^\circ|^2. \quad (56)$$

Par ailleurs, nous avons  $h_{n+1} = E_{0,\lambda}(h_n) - E_{0,\lambda}(i\lambda P_1 P_2)(f)$ , ce qui donne, partant de  $h_0 = 0$ ,

$$\begin{aligned} h_n &= - \sum_{1 \leq j \leq n} E_{0,\lambda}^j(i\lambda P_1 P_2(f)) \\ &= - \sum_{1 \leq j \leq n} E_{0,\lambda}^j(E_{0,\lambda}^{-1} - Id)(f) \\ &= (Id - E_{0,\lambda}^n)(f). \end{aligned} \quad (57)$$

Si  $f = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k^\circ \varphi_k^\circ$ , nous obtenons

$$h_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( 1 - \frac{1}{(1 - i\lambda \lambda_k^\circ)^n} \right) \alpha_k^\circ \varphi_k^\circ, \quad (58)$$

et l'erreur de l'approximation peut-être exprimée en énergie par

$$\| f - h_n \|_2^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{1 + (\lambda \lambda_k^\circ)^2} \right)^n |\alpha_k^\circ|^2, \quad (59)$$

qui devient rapidement petite lorsque  $|\lambda| > 0$  devient grand.

Des calculs entièrement similaires montrent que cette technique est valable lorsque le paramètre  $\delta$  est strictement positif, en remplaçant  $P_1 P_2$  par  $(\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta$ . Il est possible de penser qu'il existe des couples  $(\delta, \lambda)$  privilégiés, permettant d'équilibrer au mieux les exigences contradictoires de la précision et de la rapidité de la convergence. Nous présentons dans l'appendice (C) des résultats concernant deux signaux. Ces exemples laissent penser que la valeur  $\delta = 0$  s'impose ici aussi.

## 5. Simulations numériques

Afin d'illustrer numériquement ces méthodes, nous donnons brièvement l'algorithme utilisé pour la méthode de Papoulis avec paramètre  $\delta$ , pour laquelle nous présentons des résultats dans un cas pratique.

5.1. ALGORITHME. Les nombres réels  $\sigma, \tau$  et  $\delta$  étant donnés nous avons défini, dans le paragraphe 3, l'opérateur  $B_\delta$  de  $L_{0,2\sigma}^2(\mathbb{R})$  dans lui-même et le schéma itératif (39). Nous approximations l'extrapolation de  $f \in L_{0,2\sigma}(\mathbb{R})$  sur  $[-2\tau, 2\tau]$  à partir de la connaissance de  $f_{|[-\tau, \tau]}$ . L'algorithme correspondant est

Initialisation :	
$g_0(t)$	$= \left( g(\bullet) \star e^{-i\sigma \bullet \frac{\sin \sigma \bullet}{\pi \bullet}} \right) (t + 2i\delta)$
	$t \in [-2\tau, 2\tau]$
$n$	$= 0$
Iterations :	
1)	$g_{n+1}(t) = \left( (g - g_n)(\bullet) \star e^{-i\sigma \bullet \frac{\sin \sigma \bullet}{\pi \bullet}} \right) (t + 2i\delta)$
	$t \in [-2\tau, 2\tau]$
2)	$A_n = \  g_{n+1} - g_n \ _{L^2([-2\tau, 2\tau])}$
3)	If $A_n > \epsilon$ then
	$n = n + 1$
	go to 1.
	endif
Résultat :	
$\tilde{f}(t)$	$= g_{n+1}(t)$
	$t \in [-2\tau, 2\tau]$

où  $\epsilon$  est un nombre réel donné, strictement positif et petit.

5.2. SIMULATIONS. Cette étude a été faite dans le cadre des signaux radars et nous voulons présenter ici un cas d'utilisation, simplifié mais concret. Dans ce cas, les signaux mesurés le sont en fréquences et leur transformée sont à exprimer dans le domaine temporel. Les signaux dont on dispose sont, en fait, une liste de résultats du scattering d'une onde électromagnétique par un objet à différentes fréquences fixées. On doit effectuer une interprétation de la transformation de Fourier en changeant les variables puisque ce sont certains points prépondérants d'un objet qui sont à reconnaître. On utilise la transformation  $x = \frac{ct}{2}$  ( $c$ : vitesse de la lumière,  $t$ : temps (en seconde),  $x$ : position (en mètres)). On représente le signal et le module de la transformée de Fourier en  $dBm^2$  via la définition  $z(f) = 10 \log_{10}(4\pi |s(f)|^2)$ .

Nous présentons quatre résultats pour différentes valeurs du paramètre positif  $\delta$  dans le schéma itératif de Papoulis modifié sur un cas concret classique au C.E.A/C.E.S.T.A qui est représenté sur le profil de la figure 3.

Dans un tel cas, le but principal est l'amélioration de la transformée de Fourier ce qui renforce la connaissance des points les plus réfléchissants de l'objet.

Si on remarque seulement une très légère extrapolation (figure 2) pour ces quatre valeurs du paramètre, on constate néanmoins une amélioration significative de la transformée de Fourier (figure 3). Ceci est apparent sur les courbes lorsque l'on compare la transformée de Fourier du signal restreint (bande de fréquence de 6 à 7,8Ghz, courbe continue avec pointes de diamants) avec la transformée de Fourier du signal extrapolé ( $\delta = 0, 2, \delta = 5, \delta = 10$ ), ce qui met en évidence les principaux contributeurs précisant ainsi le profil de l'objet. Contrairement aux cas des signaux tests, on ne voit pas apparaître de paramètre  $\delta$  pouvant être optimal.

## Appendice A

**A1.** Nous avons testé la méthode d'Aizenberg modifiée, décrite dans le paragraphe 2, à l'aide de trois bases orthonormales:

- 1) Base de Haar.
- 2) Base de Franklin.

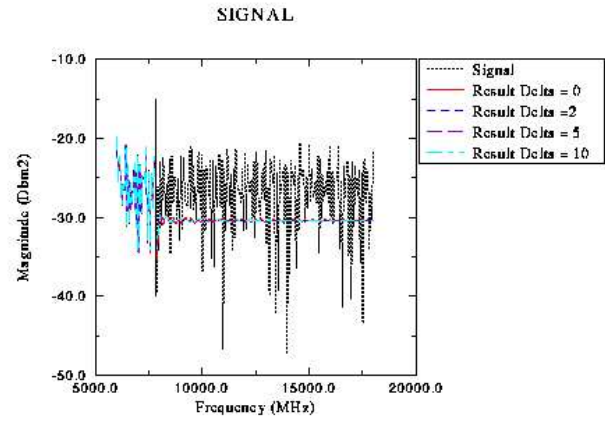


figure 2

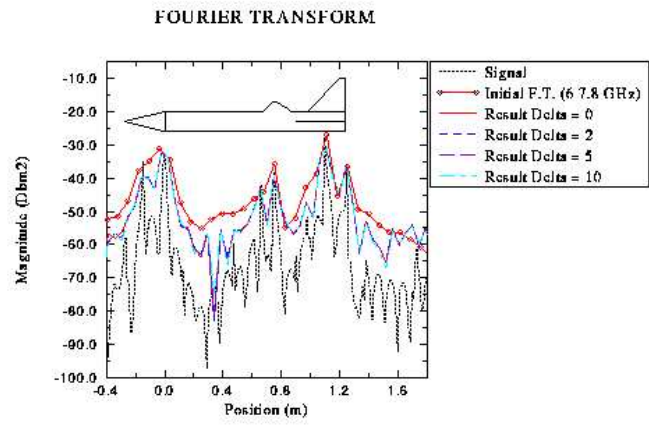


figure 3

## 3) Polynômes de Legendre.

Le lecteur pourra trouver ici les résultats numériques obtenus avec la base de Haar pour deux signaux tests classiques (*SG1* et *SG2*) analogues à ceux utilisés par Gerchberg. Les résultats obtenus avec les deux autres bases, de qualité inférieure, ne seront pas présentés. Voici la définition des deux signaux considérés.

SIGNAL *SG1*:

$$f(t) = 125 \frac{\sin\left(\frac{t}{32}\right)}{\frac{t}{32}} \cos\left(\frac{3,5t}{32}\right)$$

qui est la transformée de Fourier inverse de

$$2000\pi \left( \chi_{\left[-\frac{4,5}{32}, -\frac{2,5}{32}\right]}(\xi) + \chi_{\left[\frac{2,5}{32}, \frac{4,5}{32}\right]}(\xi) \right).$$

SIGNAL *SG2*:

$$f(t) = 63e^{-i0,105t} \frac{\sin(0,035t)}{0,035t} + 44e^{i0,12t} \frac{\sin(0,02t)}{0,02t}$$

qui est la transformée de Fourier inverse de

$$1800 \pi \chi_{[-0,14, 0,07]}(\xi) + 2200 \pi \chi_{[0,1, 0,14]}(\xi).$$

(La notation  $\chi_E$  désigne la fonction indicatrice d'un ensemble  $E$ .)

Observons que les transformées de Fourier de ces signaux, qui sont éléments de  $L_{-\sigma,\sigma}(\mathbb{R})$ , sont à valeurs réelles. Pour les faire intervenir dans les différents schémas nous devons les multiplier par  $e^{i\sigma t}$ , ce qui correspond à la translation du support de leur transformée de Fourier qui se trouve alors contenu dans  $[0, 2\sigma]$  et, l'extrapolation étant obtenue, multiplier celle-ci par  $e^{-i\sigma t}$  afin d'avoir l'extrapolation des signaux primitifs. Nous représenterons seulement l'amplitude des signaux et les parties réelles de leurs transformées de Fourier. Le sigle "T.F. Signal initial" désignera la transformée de Fourier du signal restreint  $f|_{[-\tau,\tau]}$ .

**A2.** Nous présentons ici certaines précisions concernant la matrice  $G_N$  (cf. 2.6) lorsque  $\tau = 1$  et la base de  $L^2([-1, 1])$  utilisée est celle des polynômes de Legendre. Observons cependant que les difficultés



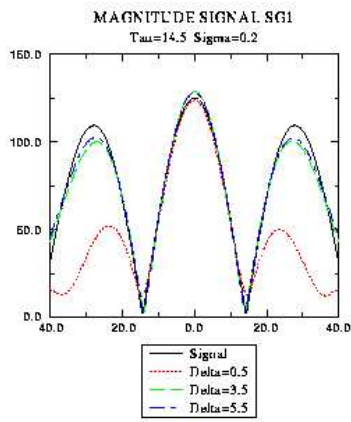


figure 4

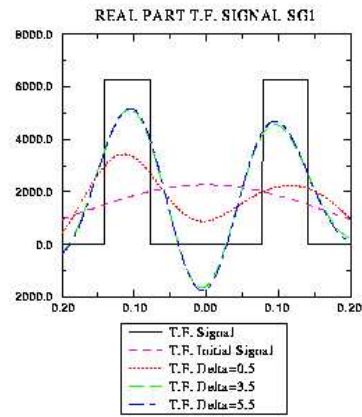


figure 5

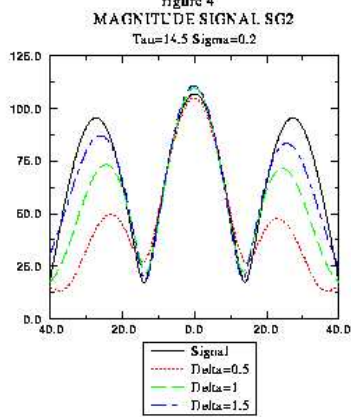


figure 6

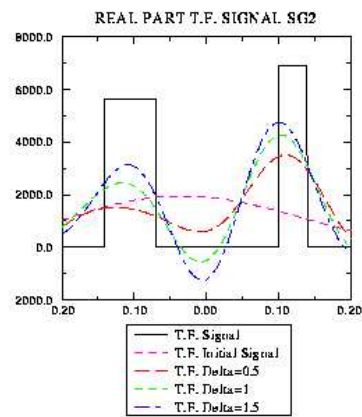


figure 7

bien connues, inhérentes à la présence de très nombreux zéros de ces polynômes dans l'intervalle  $[-1, 1]$ , n'ont pas permis d'utiliser pratiquement les propriétés agréables présentées par la matrice  $G_N$  dans ce cas.

Rappelons ([LEB]) que le  $n$ -ième polynôme de Legendre  $P_n, n \geq 0$ , est défini par

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n),$$

et que, classiquement, la suite de fonctions  $(\varphi_n)_{n \geq 0}$  telles que

$$\varphi_n(x) = \sqrt{n + \frac{1}{2}} P_n(x)$$

est une base orthonormale de  $L^2([-1, 1])$ .

L'équation différentielle des polynômes de Legendre  $P_n$  est la suivante

$$((1 - x^2)y')' + n(n + 1)y = 0.$$

Cette équation possède une solution, indépendante de  $P_n$ , désignée usuellement par  $Q_n$ , qui est appelée fonction de Legendre de seconde espèce. Une de ses expressions est

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} P_n(z) \operatorname{Log} \left( \frac{z - 1}{z + 1} \right) - R_{n-1}(z),$$

avec

$$\begin{aligned} R_{n-1}(z) &= \sum_{0 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{2(n - 2k) - 1}{(n - k)(2k + 1)} P_{n-2k-1}(z) \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} P_{k-1}(z) P_{n-k}(z). \end{aligned}$$

Une formule classique de Neuman ([G.R.]) nous donne la transformée de Cauchy de  $P_{[-1, 1]}$  sous la forme explicite

$$\int_{-1}^1 \frac{P_n(s)}{z - s} ds = 2Q_n(z) \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1],$$

ce qui permet d'écrire

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_n(s)}{z-s} ds = 2\sqrt{n+\frac{1}{2}}Q_n(z).$$

Pour  $\delta > 0$  donné et  $u \in [-1, 1]$  nous avons

$$C_{2\delta}(\varphi_n)(u) = \int_{-1}^1 \frac{\varphi_n(s)}{u-s+2i\delta} ds = 2\sqrt{n+\frac{1}{2}}Q_n(u+2i\delta)$$

Considérons maintenant deux entiers  $m$  et  $n$  tels que  $m \geq n$ . Dans ce cas  $P_m(u)$  est orthogonal à  $R_{n-1}(u+2i\delta)$  et l'on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i\pi} \left( C_{2\delta}(\varphi_m) | C_{2\delta}(\varphi_n) \right) \\ &= \int_{[-1,1]^2} \frac{\varphi_m(u)\varphi_n(s)}{s-u+2i\delta} ds du \\ &= - \int_{-1}^1 \varphi_m(u)\varphi_n(u+2i\delta) \text{Log} \left( \frac{u+1+2i\delta}{u-1+2i\delta} \right) du \end{aligned}$$

Ecrivons maintenant

$$g_n(u) = \varphi_n(u+2i\delta) \text{Log} \left( \frac{u+1+2i\delta}{u-1+2i\delta} \right).$$

Après  $m$  intégrations par parties nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i\pi} \left( C_{2\delta}(\varphi_m) | C_{2\delta}(\varphi_n) \right) \\ &= \sqrt{m+\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 (1-u^2)^m \frac{d^m}{dx^m} (g_n(u)) du \end{aligned}$$

La règle de Leibniz nous donne

$$\begin{aligned} & \frac{d^m}{du^m} (g_n(u)) \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^{m-k-1} m!}{k!(m-k)!} \left( \frac{d^k}{du^k} \varphi_n(u+2i\delta) \right) \times \\ & \quad \times \left\{ \left( \frac{1}{u+1+2i\delta} \right)^{m-k} - \left( \frac{1}{u-1+2i\delta} \right)^{m-k} \right\}, \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \left( C_{2\delta}(\varphi_m) | C_{2\delta}(\varphi_n) \right) &= C(m, n) \int_{-1}^1 (1-u^2)^m \times \\ &\times \left\{ \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^{m-k-1} m!}{k!(m-k)!} \left( \frac{d^{k+n}}{du^{k+n}} \{u^2 + 4i\delta u - 4\delta^2 - 1\} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times S(m, k, u, \delta) \right\} du, \end{aligned}$$

où

$$S(m, k, u, \delta) = \frac{(u-1+2i\delta)^{m-k} - (u+1+2i\delta)^{m-k}}{(u^2 + 4i\delta u - 4\delta^2 - 1)^{m-k}},$$

et

$$C(m, n) = \frac{\sqrt{(m+\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})}}{2^m + n!}.$$

Soit alors  $\gamma$  un cercle de centre  $0$ , contenant dans son intérieur  $[-1, 1] - 2i\delta$ , et de rayon supérieur ou égal à  $\lambda\sqrt{1+4\delta^2}$ , avec  $\lambda > 1$ . Nous avons alors les majorations, valables pour tout  $u \in [-1, 1]$ ,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d^{k+n}}{du^{k+n}} ((u+2i\delta)^2 - 1)^n \right| \\ & \leq (k+n)! \frac{\lambda}{(\lambda-1)^{n+k+1}} (1+4\delta^2)^{\frac{n-k}{2}} \left( \lambda^2 + \frac{1}{4\delta^2} \right)^n, \end{aligned}$$

que l'on déduit de la formule de Cauchy

$$\frac{d^{k+n}}{du^{k+n}} ((u+2i\delta)^2 - 1)^n = \frac{(k+n)!}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{(\zeta^2 - 1)^n}{(\zeta - u - 2i\delta)^{n+k+1}} d\zeta,$$

car, en effet,  $|\zeta^2 - 1| \leq \lambda^2(1+4\delta^2) + 1$ , et  $|\zeta - (u+2i\delta)| \geq (\lambda-1)\sqrt{1+4\delta^2}$ .

On peut majorer  $S(m, k, u, \delta)$  à l'aide de l'inégalité des accroissements finis pour obtenir

$$|S(m, k, u, \delta)| \leq 2(m-k) \frac{(4+4\delta^2)^{\frac{m-k}{2}}}{(1+4\delta)^{m-k}},$$

et l'on arrive ainsi à

$$\left| \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^{m-k-1}}{k!(m-k)!} \frac{d^{k+n}}{du^{k+n}} \{u^2 + 4i\delta u - 4\delta^2 - 1\} S(m, k, u, \delta) \right| \\ \leq \frac{2\lambda}{(\lambda-1)^{n+1}} (\lambda^2 + 1)^n \frac{(4+4\delta^2)^{\frac{m}{2}}}{(1+4\delta^2)^{m-\frac{n}{2}}} \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(k+n)!}{k!} \frac{1}{(\lambda-1)^k}.$$

Il en résulte que

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \left( C_{2\delta}(\varphi_m) | C_{2\delta}(\varphi_n) \right) \right| \leq \frac{\sqrt{(m+\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})}}{2^{m+n}} \frac{2\lambda}{(\lambda-1)^{n+1}} \times \\ \times (\lambda^2 + 1)^n \left( \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(k+n)!}{k!n!} \frac{1}{(\lambda-1)^k} \right) \frac{(4+4\delta^2)^{\frac{n}{2}}}{(1+4\delta^2)^{m-\frac{n}{2}}},$$

soit

$$\left| \left( C_{2\delta}(\varphi_m) | C_{2\delta}(\varphi_n) \right) \right| \\ \leq \frac{4\pi\lambda(\lambda^2 + 1)^n}{2^n(\lambda-1)^{n+1}} \left( \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n+k}{k} \frac{1}{(\lambda-1)^k} \right) (1+4\delta^2)^{-\frac{m-n}{2}},$$

ce qui montre une décroissance exponentielle en  $\delta^{-|m-n|}$  de  $\left| \left( C_{2\delta}(\varphi_m) | C_{2\delta}(\varphi_n) \right) \right|$ ,  $|m| > |n|$ , lorsque  $|m-n| \rightarrow +\infty$ .

## Appendice B

Nous présentons ici quelques résultats numériques concernant le schéma de Papoulis dans le cadre des espaces de Hardy pour les deux signaux  $SG1$  et  $SG2$ . Nous trouvons ici que  $\delta = 0$  est une valeur optimale du paramètre lorsqu'aucune régularisation n'est mise en oeuvre. Cela apparaît sur les figures ci-dessous représentant la norme dans  $L^2(\mathbb{R})$ , approchée sur  $[-2\tau, 2\tau]$ , de la différence entre les signaux et leurs approximations, comme fonction de la variable  $\delta$ .

## Appendice C

Les résultats qui suivent concernent le dernier schéma (paragraphe 4). Nous utilisons ici les éléments finis  $P_0$  de préférence à une base

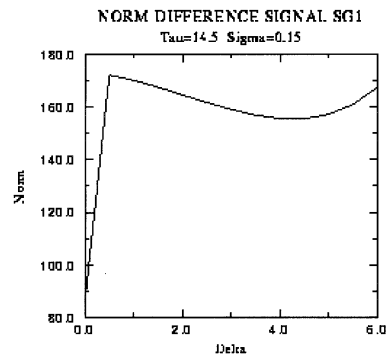


figure 8

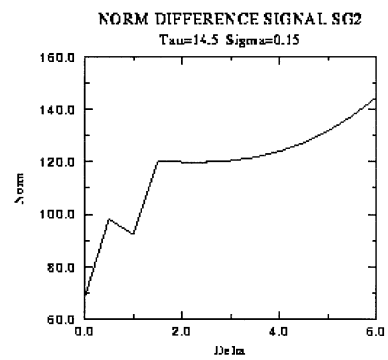


figure 9

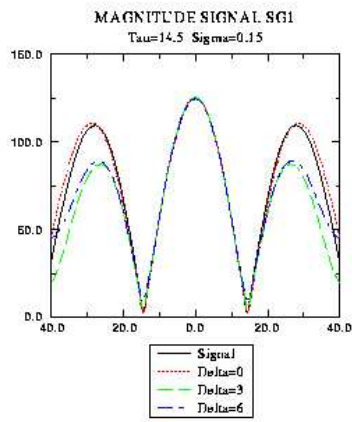


figure 10

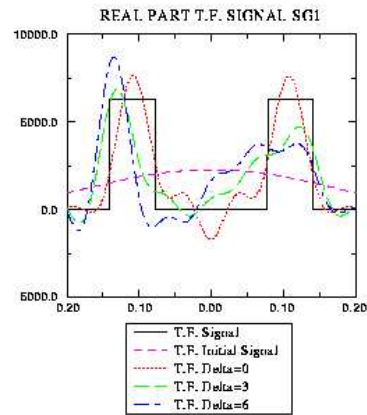


figure 11

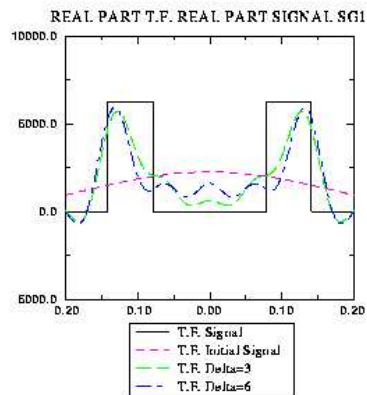


figure 12

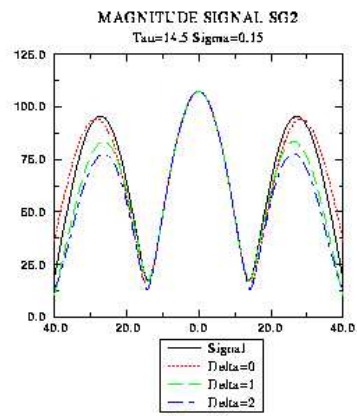


figure 11

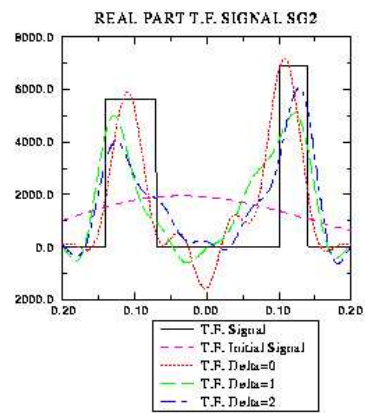


figure 12



orthogonale. Ils sont, en effet, numériquement efficaces, et les calculs les utilisant sont vraiment très aisés.

Deux paramètres différents apparaissent dans cette méthode: un paramètre de relaxation  $\lambda$  et le paramètre  $\delta$  provenant de la méthode d'Aizenberg. Nous utilisons ces deux degrés de liberté afin d'optimiser, dans la mesure du possible, les résultats. Nous utilisons ici aussi la norme de  $L^2(\mathbb{R})$ , approchée sur  $[-2\tau, 2\tau]$ , pour quantifier la qualité de l'approximation.

Les deux figures suivantes, pour les signaux  $SG1$  et  $SG2$ , montrent clairement l'émergence d'un couple optimal  $(\lambda, \delta)$ . Le meilleur résultat est obtenu pour  $\delta = 0$  et  $\lambda$  proche de 6,5 pour  $SG1$ , et de 2,5 pour  $SG2$ . Cependant, on peut observer un autre couple relativement efficient :  $\delta = 0,01$  et  $\lambda$  proche de 10,5 pour  $SG1$ , et de 5 pour  $SG2$ .

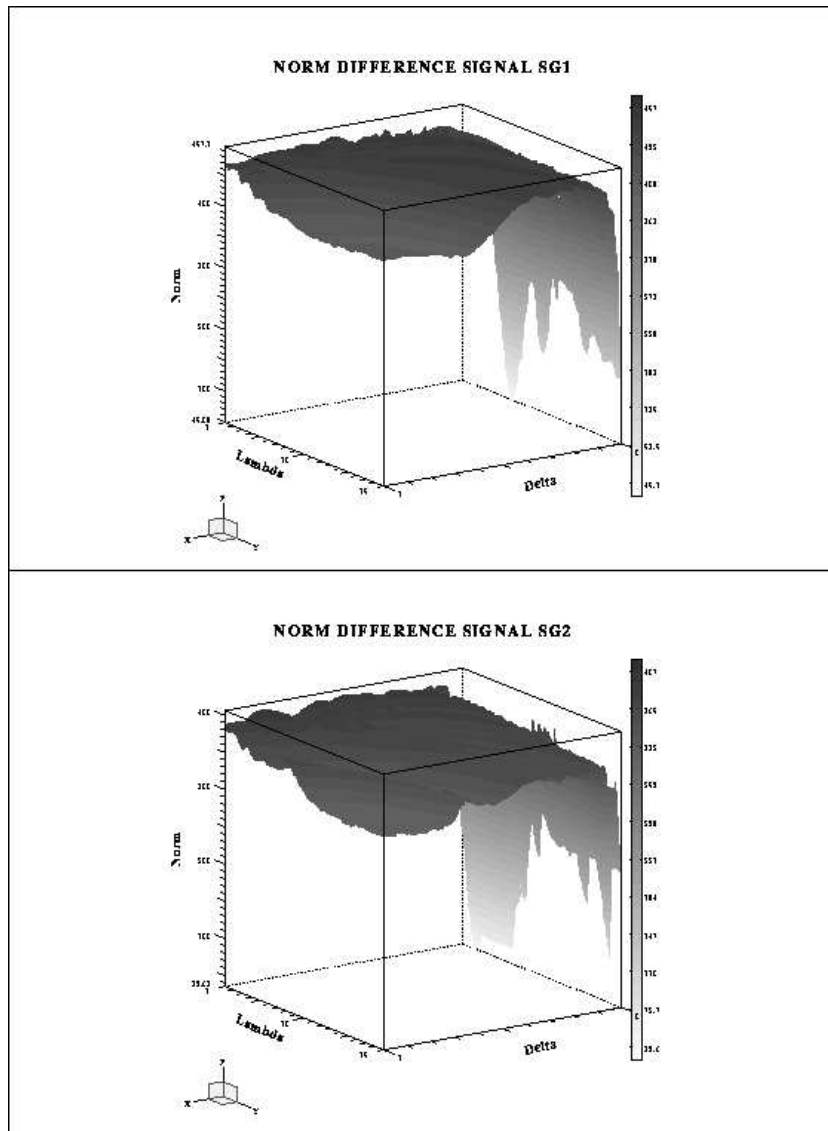
Nous remarquerons encore que la valeur de  $\delta$  qui apparaît dans ces couples optimaux, pour les deux signaux  $SG1$  et  $SG2$ , est la valeur nulle. Nous ne savons pas analyser ce phénomène.

Nous ne présenterons pas de résultats pour les valeurs de  $\delta > 1$  car ils sont très dégradés par rapport aux précédents. Pour ce schéma la convergence est plus rapide pour  $\delta = 0$ .

## Appendice D. Régularisation

L'opérateur de restriction  $\alpha_\sigma^\delta = R_\tau \circ i_\sigma^\delta$  est injectif, continu et non surjectif. Si on considère le problème inverse linéaire décrit par l'équation  $\alpha_\sigma^\delta(F) = G$  où  $G \in L^2([- \tau, \tau])$  est donnée, on désignera, comme usuellement, par  $F^\dagger$  la solution généralisée de cette équation, c'est à dire l'élément de norme minimale dans  $L_{0,2\sigma}^2(\mathbb{R})$  qui minimise l'erreur  $\| \alpha_\sigma^\delta(F) - G \|_{L^2([- \tau, \tau])}$ . Si  $g = \alpha_\sigma^\delta(f)$ , avec  $f \in L_{0,2\sigma}^2(\mathbb{R})$  donné, on a  $f^\dagger = f$ . L'opérateur inverse généralisé  $(\alpha_\sigma^\delta)^\dagger$  est ici défini dans  $L^2([- \tau, \tau])$  car  $\alpha_\sigma^\delta$  est d'image dense. Néanmoins le problème inverse qui nous occupe est mal posé([Y]).

Comme nous ne connaissons pas analytiquement le système singulier de l'opérateur  $\alpha_\sigma^\delta$ , il est difficile d'envisager une méthode de régularisation le faisant intervenir sous la forme d'une série. Par contre, on peut penser à utiliser le procédé itératif associé à  $B_\delta$ , écrit



figures 15 et 16

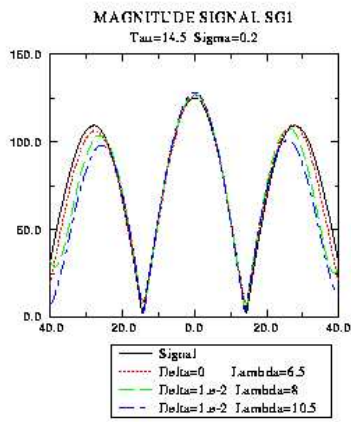


figure 17

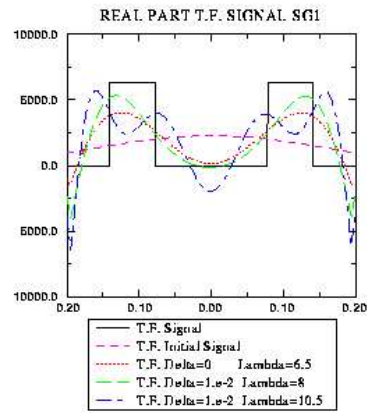


figure 18

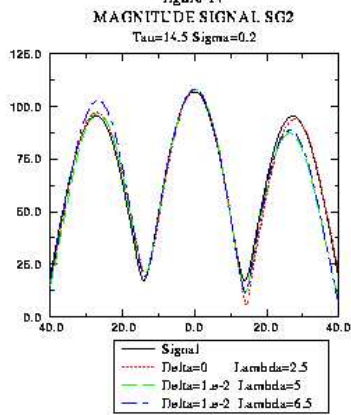


figure 19

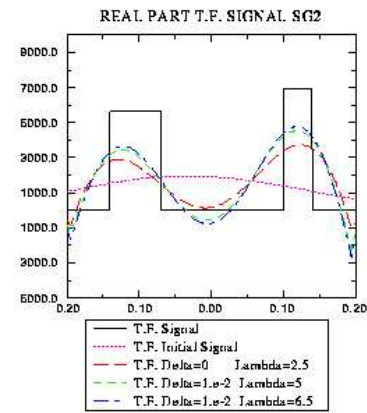


figure 20

sous la forme

$$g_n = g_{n-1} + (\alpha_\sigma^\delta)^*(\alpha_\sigma^\delta(f)) - (\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta(g_{n-1}),$$

et le régulariser comme le font M. Defrise et C. De Mol ([D. DM.]) à l'aide de la méthode de Landweber, dans laquelle les approximations  $g_n^\epsilon$  de la solution sont, pour une donnée perturbée  $g^\epsilon \in L^2([-\tau, \tau])$  telle que  $\|g - g^\epsilon\|_{L^2([-\tau, \tau])} \leq \epsilon$ , données par

$$g_n^\epsilon = g_{n-1}^\epsilon + \lambda((\alpha_\sigma^\delta)^*(g^\epsilon) - (\alpha_\sigma^\delta)^* \circ \alpha_\sigma^\delta(g_{n-1}^\epsilon)),$$

où  $0 < \lambda < \frac{2}{\|\alpha_\sigma^\delta\|^2}$ .

Dans ce cadre, le nombre d'itérations  $n$  joue le rôle de l'inverse d'un paramètre de régularisation, ce qui donne un test d'arrêt  $n(\epsilon)$ . L'idée essentielle de cette méthode, que l'on trouve détaillée dans ([D.DM]), consiste à observer que, pour  $f \in L_{0,2\sigma}^2(\mathbb{R})$  donnée et seulement connue par une approximation bruitée  $g^\epsilon$  de la restriction  $g$  de  $f$  à  $[-\tau, \tau]$  telle que  $\|g - g^\epsilon\|_{L^2([-\tau, \tau])} \leq \epsilon$ , on a

$$\begin{aligned} \|g_n^\epsilon - f\| - \|g_{n-1}^\epsilon - f\| &\leq \lambda \|\alpha_\sigma^\delta g_{n-1}^\epsilon - g^\epsilon\| \times \cdots \\ &\cdots \left\{ 2\epsilon + (\lambda \|\alpha_\sigma^\delta\|^2 - 2) \|\alpha_\sigma^\delta g_{n-1}^\epsilon - g^\epsilon\| \right\}, \end{aligned}$$

ce qui assure que la  $n$ -ième approximation est meilleure que la  $(n-1)$ -ième, tant que  $\|\alpha_\sigma^\delta g_{n-1}^\epsilon - g^\epsilon\| \geq \frac{2\epsilon}{2 - \lambda \|\alpha_\sigma^\delta\|^2}$ .

Cette condition, testée à chaque itération, donne un test d'arrêt très simple car l'erreur  $\|\alpha_\sigma^\delta g_n^\epsilon - g^\epsilon\|$  décroît à chaque itération ([D.DM]).

Remarquons que, malheureusement, nous ne connaissons pas (sauf pour  $\delta = 0$ ) la valeur de  $\|\alpha_\sigma^\delta\|$  qui est égale à la racine carrée de  $\lambda_\sigma^\delta$  (cf. 3.6). La méthode qui vient d'être décrite pourra être utilisée lorsque sera connue, au moins numériquement, la valeur de  $\lambda_\sigma^\delta$ .

Nous présentons maintenant une simulation concernant SG1 bruité par un bruit blanc, le rapport signal sur bruit étant de 15 dB. Dans cette simulation le test d'arrêt correspond à une différence entre deux itérés successifs inférieure à un seuil fixé à l'avance: 0.001 en erreur relative (cf 5.1). On ne constate pas de différence significative entre les deux cas  $\lambda = 1$  et  $\lambda = 0.3$ . On peut penser que le procédé, de part sa nature itérative, absorbe le bruit de lui-même, avec ou sans régularisation, et ceci quelle que soit la valeur (petite) de  $\delta \geq 0$ .

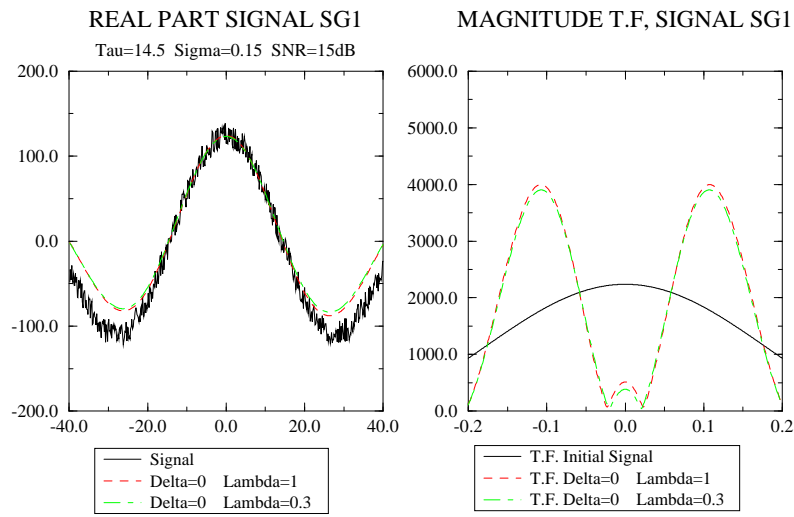


figure 21

figure 22

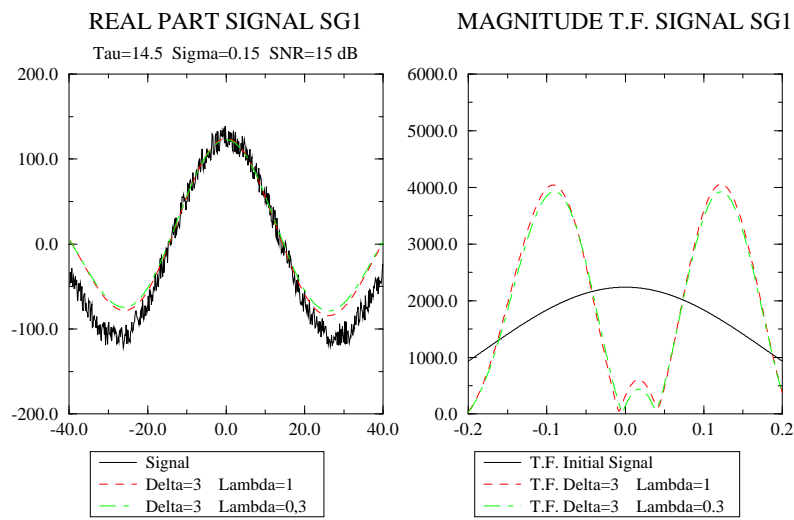


figure 23

figure 24

## RÉFÉRENCES

- [A] AIZENBERG L., *Carleman's Formulas in Complex Analysis*, Theory and Applications, M. I. A. vol. **244**, Kluwer Acad. Publ., 1963.
- [B.G] BERTERO M. and GRUNBAUM F. A., *Commuting differential operators for the finite Laplace Transform*, Inv. Probl. **1** (1985), 181.
- [D.DM] DEFRISE M. and DE MOL C., *A note on stopping rules for iterative regularization methods and filtered SVD in Inverse Problems: An Interdisciplinary Study*, Academic Press, New-York 1987, 261.
- [G] GERCHBERG R. W., *Super Resolution though error energy reduction*, Optica Acta **21** (1974), 709-720.
- [G.R] GRADSHTEYN I. S. and I. M. RYZHIK, *Table of Integrals Series and Products*, (Corrected and Enlarged Edition) Academic Press, 1980.
- [H] KATZNELSON Y., *An introduction to Harmonic Analysis*, Dover Publ. , 1976.
- [H] HURT N. E., *Phase Retrieval and Zero-Crossing: mathematical methods in image reconstruction*, M. I. A. Kluwer Acad. Publ. , 1989.
- [LEB] LEBEDEV N. N., *Special Functions and Their Applications*, Dover Publ. , 1972.
- [P] PAPOULIS A., *A New Algorithm in Spectral Analysis and Band-limited Extrapolation*, I. E. E. E. CAS **22** (1975), 735-742.
- [S.P.] SLEPIAN D. and POLLACK H. O., *Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier analysis and uncertainty-I*, Bell System Tech. J. **40** (1961), 43-63, II *ibid* **40** (1961), 65-84, III *ibid* **41** (1962), 1295-1336.
- [Y] YOULA D. C., *Generalized Image Restoration by the method of Alternating Orthogonal Projections*, I. E. E. E. CAS **25** n° 9 (1978), 694-702.
- [Y.W.] YOULA D. C. and WEBB H., *Image Restoration by the method of projections onto convex sets*, I. E. E. E. TMI-1 (1982), 81-94.

Pervenuto in Redazione il 20 Agosto 1996.