# DEFORMAZIONE DI SUPERFICI NELLO SPAZIO DI MÖBIUS (*)

by EMILIO MUSSO (in L'Aquila)(**)

SOMMARIO. - *In questo articolo studiamo il problema di deformazione per superfici nello spazio di Möbius tramite il metodo "moving frames".*

SUMMARY. - *In the present paper we study the deformation problem for surfaces in Möbius space by the method of moving frames.*

## Introduction.

In questo lavoro studiamo la deformazione delle superfici nello spazio euclideo rispetto all'azione locale del gruppo di Möbius. La ricerca trae spunto da alcuni lavori di P. Griffiths e G. Jensen ([17], [18], [19]), nei quali il concetto di deformazione è formalizzato nel contesto della teoria dei gruppi di trasformazioni.

Proveremo che le superfici deformabili di $\mathbb{E}^3$ sono caratterizzate dall'avere un atlante di coordinate principali-isoterme. Il fatto ci è

1991 Mathematics Subject Classification: 53A20,58E40,58A17.
Key words and phrases: Conformal Geometry, Isothermal surfaces, Deformation of Surfaces.

Partially supported by CNR contract n. 93.00554.CTO1 and MPI 40%.

(*) Pervenuto in Redazione il 20 Marzo 1995.

(**) Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di L'Aquila, Via Vetoio, Loc. Coppito. 67100-L'Aquila (Italy).
E-mail:musso@axscaq.aquila.infn.it

sembrato di qualche interesse, specialmente per i collegamenti con recenti ricerche dedicate allo studio delle superfici isoterme ([6], [13], [15]), che segnalano un rinnovato interesse per un argomento molto studiato nella letteratura classica (cfr. [1], [3], [7], [8], [9], [11], [12], [14], [16], [22], [23]).

Nella prima sezione presentiamo una breve introduzione alla geometria conforme delle superfici. Consideriamo la fibrazione di Möbius $P \to \mathbb{E}^3$ e scriviamo le equazioni di struttura della connessione conforme normale. Quindi, applichiamo il metodo del "moving frames" ([17]), costruiamo, per ogni superficie senza punti ombelicali, un sollevamento canonico in $P$ ([2], [4], [21]). Il "pull-back" della connessione conforme normale determina gli invarianti della superficie, che consistono in cinque funzioni, denotate con $p_1$, $p_2$, $p_3$, $q_1$ e $q_2$. Infine, proveremo che le superfici isoterme sono caratterizzate dall'annnullarsi della funzione $p_2$.

Nella seconda sezione studiamo la deformazione delle superfici rispetto all'azione locale del gruppo di Möbius, e dimostriamo che le superfici deformabili sono isoterme.

Nella terza sezione costruiamo un sistema di Pfaff su $P \times \mathbb{R}^4$ le cui varietà integrali sono sollevamenti di superfici isoterme. Proveremo che, assegnate quattro funzioni analitiche $g_1(t)$, $g_2(t)$, $s_1(t)$, $s_3(t)$, esiste un'unica superficie isoterma, analitica-reale.

$$f(t,s) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^3$$

tale che

$$g_1(t) = q_1(t,0), \;\; g_2(t) = q_2(t,0), \;\; s_1(t) = p_1(t,0), \;\; s_3(t) = p_3(t,0).$$

Nel corso della dimostrazione utilizziamo la teoria dei sistemi differenziali esterni. Rinviamo alla monografia [5] per giustificare alcuni passaggi che altrimenti sarebbero poco comprensibili.

Adottiamo la convenzione di Einstein sugli indici e li faremo variare nel modo seguente

$$\begin{aligned} 0 &\leq I, J, \ldots \leq 4\,; & 1 &\leq i, j, \ldots \leq 2\,; \\ 1 &\leq a, b, \ldots \leq 3\,; & 1 &\leq \alpha, \beta, \ldots \leq 8\,. \end{aligned}$$

## 1. Preliminari.

La fibrazione di Möbius.

Consideriamo in $\mathbb{R}^5$ la forma bilineare simmetrica

$$< x, y >= \varepsilon_{IJ} x^I y^J = -(x^0 y^4 + x^4 y^0) + x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3$$

ed indichiamo con $G$ la componente connessa dell'identità del corrispondente gruppo ortogonale. Dato $x \in \mathbb{R}^5$, $x \neq 0$ denotiamo con $[x]$ la retta vettoriale da esso generata.

Il gruppo $G$ agisce transitivamente sulla quadratica

$$\mathcal{M} = \{[x] \in \mathbb{RP}^4 :< x, x >= 0\} \subset \mathbb{RP}^4 ,$$

nel modo seguente

$$\mathbf{a}[x] = [\mathbf{a}x], \quad \forall\, \mathbf{a} \in G \text{ e } \forall\, [x] \in \mathcal{M}.$$

Su $\mathcal{M}$ fissiamo il "punto all'infinito" $P_\infty(0, \dots, 0, 1)$ ed identifichiamo $\mathcal{M} - \{P_\infty\}$ con lo spazio euclideo $\mathbb{E}^3$:

$$x^0 = 1,\ x^1 = z^1,\ x^2 = z^2,\ x^3 = z^3,\ x^4 = \frac{1}{2}\left[(z^1)^2 + (z^2)^2 + (z^3)^2\right],$$
$$\forall\, z = (z^1, z^2, z^3) \in \mathbb{E}^3.$$

Per ogni $\mathbf{a} = (\mathbf{a}^I_J) \in G$ denotiamo con $\mathbf{a}_J$ il $J$-esimo vettore colonna e definiamo

$$P = \{\mathbf{a} \in G : [\mathbf{a}_0] \neq P_\infty\}.$$

L'applicazione $\pi : \mathbf{a} \in P \longrightarrow [\mathbf{a}_0] \in \mathbb{E}^3$ determina su $P$ una struttura di fibrato principale con gruppo strutturale

$$G_0 = \left\{ b = b(r, B, p) \ : r > 0, B \in SO(3), p = {}^t(p^1, p^2, p^3) \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

dove

$$b(r, B, p) = \begin{pmatrix} r^{-1} & {}^t p B & \frac{1}{2} r\, {}^t p p \\ 0 & B & rp \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}.$$

Consideriamo le $\mathbf{a}_I$ come funzioni differenziabili $P \longrightarrow \mathbb{R}^5$, possiamo scrivere

$$d\mathbf{a}_I = \omega^J_I \mathbf{a}_J \tag{1.1}$$

dove, le $\omega_I^J$ sono le restrizioni su $P$ delle forme di Maurer-Cartan di $G$.

Poichè i prodotti scalari $< \mathbf{a}_I, \mathbf{a}_J >$ sono delle costanti, si ottiene

$$\varepsilon_{IK}\omega_J^K + \varepsilon_{JK}\omega_I^K = 0. \tag{1.2}$$

Differenziando la (1.1) si trova

$$d\omega_J^I = -\omega_K^I \wedge \omega_J^K. \tag{1.3}$$

Riferimenti adattati.

Sia $S$ una superficie semplicemente connessa, orientata e sia $f : S \longrightarrow \mathbb{E}^3$ un'immersione senza punti ombelicali.

I *riferimenti conformi* della superficie sono applicazioni differenziabili

$$\mathbf{a} : U \subset S \longrightarrow P,$$

definite su aperti $U \subset S$, tali che

$$[\mathbf{a}_0(p)] = f(p), \quad \forall p \in U.$$

Assegnato un riferimento $\mathbf{a} : U \longrightarrow P$, ogni altro su $U$ è dato dalla

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}\, b(r, B, p) \tag{1.4}$$

dove,

$$b(r, B, p) : U \longrightarrow G_0$$

è un'opportuna applicazione differenziabile. Poniamo

$$\theta = (\theta_J^I) = \mathbf{a}^*(\omega_J^I) \quad \text{e} \quad \hat{\theta} = \hat{\mathbf{a}}^*(\omega).$$

Osservando la (1.4), si ottiene

$$\hat{\theta} = b^{-1}\theta b + b^{-1}db, \tag{1.5}$$

da cui

$$\begin{pmatrix} \hat{\theta}_0^1 \\ \hat{\theta}_0^2 \\ \hat{\theta}_0^3 \end{pmatrix} = r^{-1}B^{-1} \begin{pmatrix} \theta_0^1 \\ \theta_0^2 \\ \theta_0^3 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Un riferimento $\mathbf{a} : U \longrightarrow P$ si dice del *primo ordine* se

$$\theta_0^3 = 0, \quad \theta_0^1 \wedge \theta_0^2 > 0.$$

L'esistenza locale dei riferimenti del primo ordine segue immediatamente dalla (1.6) ed inoltre, due riferimenti del primo ordine sono legati dalla (1.4), dove la funzione di transizione $b : U \longrightarrow G_0$ assume valori nel sottogruppo

$$G_1 = \left\{ b(r, A, p, t) \ : p \in \mathbb{R}^2, \ t \in \mathbb{R}\, ; r > 0, \ A \in SO(2) \right\},$$

dove

$$b(r, A, p, t) = \begin{pmatrix} r^{-1} & {}^t pA & t & \dfrac{r[{}^t pp + t^2]}{2} \\ 0 & A & 0 & rp \\ 0 & 0 & 1 & rt \\ 0 & 0 & 0 & r \end{pmatrix}.$$

Differenziando $\theta_0^3$ ed usando la (1.3), si deduce

$$\theta_1^3 = h_{11}\theta_0^1 + h_{12}\theta_0^2, \ \theta_2^3 = h_{12}\theta_0^1 + h_{22}\theta_0^2.$$

Cambiando il riferimento del primo ordine, le funzioni $h_{ij}$ si trasformano nel modo seguente

$$\begin{pmatrix} \hat{h}_{11} & \hat{h}_{12} \\ \hat{h}_{12} & \hat{h}_{22} \end{pmatrix} = r\, {}^t A \begin{pmatrix} h_{11} - t & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} - t \end{pmatrix} A. \tag{1.7}$$

dove, $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}\, b(r, A, p, t)$ e $\hat{\theta}_j^3 = \hat{h}_{ji}\hat{\theta}_0^i$. Ponendo

$$h = (h_{ij}), \ \hat{h} = (\hat{h}_{ij}),$$

si ricava

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{tr}(\hat{h}) & = & r(\operatorname{tr}(h) - t), \\ \det(\hat{h}) & = & r^2 \left[t^2 - 2t \cdot \operatorname{tr}(h) + \det(h)\right], \end{array} \tag{1.8}$$

Da (1.6) e da (1.8) vediamo che la forma differenziale

$$\Omega = \left\{ \operatorname{tr}(h)^2 - \det(h) \right\} \theta_0^1 \wedge \theta_0^2 \tag{1.9}$$

non dipende dalla scelta del riferimento.

Dall'assenza di punti ombelicali segue che $\Omega$ è una forma di volume e quindi, dalla (1.8) si deduce l'esistenza di riferimenti rispetto cui

$$\mathrm{tr}\,(h) = 0, \ \det(h) = -1.$$

Tali riferimenti sono detti del *secondo ordine*. Se $\mathbf{a}$ ed $\hat{\mathbf{a}}$ sono riferimenti del secondo ordine definiti sull'aperto $U$, allora si ha

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}\, b(1, A, p, 0),$$

dove $A : U \longrightarrow SO(2)$ e $p : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sono applicazioni di classe $C^\infty$.

Da ciò segue che i differenziali quadratici

$$\Phi = \delta_{ij}\theta_0^i\theta_0^j, \quad \Psi = h_{ij}\theta_0^i\theta_0^j, \tag{1.10}$$

non dipendono dalla scelta dei riferimenti.

Poniamo

$$\theta_3^0 = m_1\theta_0^1 + m_2\theta_0^2.$$

Cambiando i riferimenti si ha

$$(\hat{m}_1, \hat{m}_2) = (m_1, m_2)A - (p_1, p_2)A \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} A.$$

Da cui si deduce l'esistenza di riferimenti tali che

$$m_1 = m_2 = 0.$$

I riferimenti del secondo ordine che verificano $m_1 = m_2 = 0$ sono detti del *terzo ordine*. Se $\mathbf{a} : U \longrightarrow P$ ed $\hat{\mathbf{a}} : U \longrightarrow P$ sono due riferimenti del terzo ordine, allora avremo

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}\, b(1, A, 0, 0),$$

dove $A : U \longrightarrow SO(2)$ è un'applicazione di classe $C^\infty$.

Differenziando $\theta_3^0 = 0$ ed applicando le equazioni di struttura si ottiene

$$\theta_i^0 = s_{ij}\theta_j^3$$

dove le funzioni $s_{ij}$ sono simmetriche negli indici $i$ e $j$.

Chiameremo *normali* i riferimenti del terzo ordine tali che

$$h_{11} = 1; \quad h_{12} = 0.$$

Dalla (1.7) si deduce immediatamente l'esistenza locale dei riferimenti normali. Inoltre, se $\mathbf{a} : U \longrightarrow P$ è un riferimento normale allora, ogni altro su $U$ è del tipo $\mathbf{a}\, b(1, \pm \mathrm{Id}, 0, 0)$. Quindi, la totalità dei riferimenti normali è un fibrato principale su $S$ con gruppo strutturale $\mathbb{Z}_2$. Tenendo presente che $S$ è semplicemente connessa, deduciamo l'esistenza di due riferimenti normali definiti su tutta la superficie.

PROPOSIZIONE 1.1. *I riferimenti normali di una superficie verificano le seguenti condizioni*

$$\theta_0^1 \wedge \theta_0^2 > 0, \quad \theta_0^1 - \theta_1^3 = \theta_0^2 + \theta_2^3 = \theta_0^3 = \theta_3^0 = 0,$$
$$\theta_1^2 = q_1\theta_0^1 + q_2\theta_0^2, \quad \theta_0^0 = -2q_2\theta_0^1 + 2q_1\theta_0^2,$$
$$\theta_1^0 = p_1\theta_0^1 + p_2\theta_0^2, \quad \theta_2^0 = -p_2\theta_0^1 + p_3\theta_0^2$$

*da cui si ricavano le equazioni*

$$d\theta_0^1 = -q_1\theta_0^1 \wedge \theta_0^2, \quad d\theta_0^2 = -q_2\theta_0^1 \wedge \theta_0^2 \tag{1.11}$$
$$-dq_1 \wedge \theta_0^1 - dq_2 \wedge \theta_0^2 + \left(1 + p_1 + p_3 + q_1^2 + q_2^2\right)\theta_0^1 \wedge \theta_0^2 = 0 \tag{1.12}$$
$$dq_2 \wedge \theta_0^1 - dq_1 \wedge \theta_0^2 + p_2\theta_0^1 \wedge \theta_0^2 = 0 \tag{1.13}$$
$$-dp_1 \wedge \theta_0^1 - dp_2 \wedge \theta_0^2 + [4q_2p_2 + q_1(3p_1 + p_3)]\,\theta_0^1 \wedge \theta_0^2 = 0 \tag{1.14}$$
$$dp_2 \wedge \theta_0^1 - dp_3 \wedge \theta_0^2 + [-4q_1p_2 + q_2(p_1 + 3p_3)]\,\theta_0^1 \wedge \theta_0^2 = 0. \tag{1.15}$$

SUPERFICI ISOTERME.

Consideriamo $\mathbb{E}\,(3)$ come sottovarietà di $P$:

$$(A, y) \in \mathbb{E}\,(3) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & A & 0 \\ \dfrac{{}^t yy}{2} & {}^t yA & 1 \end{pmatrix}.$$

Indichiamo con $\mathbf{e} = (f, e_1, e_2, e_3) : S \longrightarrow \mathbb{E}\,(3)$ il sollevamento di $f : S \longrightarrow \mathbb{E}^3$ definito nel modo seguente: $e_1(p)$, $e_2(p)$ sono versori tangenti alle linee di curvatura, $e_3(p)$ è il versore normale ad $S$ in $p$, le basi $\{e_1(p), e_2(p)\}$ e $\{e_1(p), e_2(p), e_3(p)\}$ sono orientate positivamente.

Valgono allora le equazioni di struttura

$$\begin{aligned} df &= \beta^1 e_1 + \beta^2 e_2, & de_1 &= \beta^2_1 e_1 + a\beta^1 e_3, \\ de_2 &= -\beta^2_1 e_1 + \mathrm{c}\beta^2 e_3, & de_3 &= -a\beta^1 e_1 - \mathrm{c}\beta^2 e_2. \end{aligned} \tag{1.16}$$

I coefficienti $a, \mathrm{c}$ sono le curvature principali della superficie e supponiamo

$$a(p) > \mathrm{c}(p), \quad \forall p \in S.$$

L'applicazione $\mathbf{e} : S \longrightarrow \mathbb{E}(3)$ determina un riferimento conforme

$$\hat{\mathbf{a}} = (\hat{\mathbf{a}}_0, \dots, \hat{\mathbf{a}}_4) : S \longrightarrow P.$$

Dalla (1.16) ricaviamo

$$\begin{aligned} d\hat{\mathbf{a}}_0 &= \beta^1 \hat{\mathbf{a}}_1 + \beta^2 \hat{\mathbf{a}}_2, & d\hat{\mathbf{a}}_1 &= \beta^2_1 \hat{\mathbf{a}}_2 + \beta^3_1 \hat{\mathbf{a}}_3 + \beta^1 \hat{\mathbf{a}}_4, \\ d\hat{\mathbf{a}}_2 &= -\beta^2_1 \hat{\mathbf{a}}_1 + \beta^3_2 \hat{\mathbf{a}}_3 + \beta^2 \hat{\mathbf{a}}_4, & d\hat{\mathbf{a}}_3 &= -\beta^3_1 \hat{\mathbf{a}}_1 - \beta^3_2 \hat{\mathbf{a}}_2, \\ d\hat{\mathbf{a}}_4 &= 0. \end{aligned}$$

Definiamo

$$R = \frac{1}{2}(a - \mathrm{c}), \quad H = \frac{1}{2}(a + \mathrm{c})$$

e, per ogni funzione $g : S \longrightarrow \mathbb{R}$, poniamo

$$dg = R(g_1 \beta^1 + g_2 \beta^2).$$

Finalmente definiamo

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_4) : S \longrightarrow P$$

nel modo seguente

$$\mathbf{a}_0 = R\,\hat{\mathbf{a}}_0,\ \mathbf{a}_1 = \hat{\mathbf{a}}_1 - H_1 \hat{\mathbf{a}}_0,\ \mathbf{a}_2 = \hat{\mathbf{a}}_2 + H_2 \hat{\mathbf{a}}_0,\ \mathbf{a}_3 = \hat{\mathbf{a}}_3 + H \hat{\mathbf{a}}_0,$$

$$\mathbf{a}_4 = \frac{1}{R}\left\{ \frac{1}{2}\left( H^2 + H_1^2 + H_2^2 \right) \hat{\mathbf{a}}_0 - H_1 \hat{\mathbf{a}}_1 + H_2 \hat{\mathbf{a}}_2 + H \hat{\mathbf{a}}_3 + \hat{\mathbf{a}}_4 \right\}.$$

Con un calcolo diretto si ottiene

$$\theta^1_0 = R\,\beta^1,\ \theta^2_0 = R\,\beta^2,\ \theta^3_0 = 0,\ \theta^3_1 = \theta^1_0,\ \theta^3_2 = -\theta^2_0,\ \theta^0_3 = 0. \tag{1.17}$$

Da cui segue che $\mathbf{a} : S \longrightarrow P$ è un riferimento normale della superficie.

DEFINIZIONE. Una superficie di $\mathbb{E}^3$ si dice *isoterma* se possiede un atlante di coordinate principali-isoterme.

PROPOSIZIONE 1.3. *$f : S \longrightarrow \mathbb{E}^3$ è una superficie isoterma se e solo se $p_2 = 0$*

*Dimostrazione.* Fissiamo il campo di riferimenti normali e prendiamo delle coordinate locali $(u, v)$ tali che

$$\theta_0^1 = G(u,v)du, \quad \theta_0^2 = F(u,v)dv.$$

Dalla (1.17) segue che $(u, v)$ è un sistema di coordinate principali e, dalla (1.11) si ottiene

$$q_1 = \frac{1}{F}\frac{\partial}{\partial v}(\log G), \quad q_2 = -\frac{1}{G}\frac{\partial}{\partial u}(\log F). \tag{1.18}$$

Supponiamo $p_2 = 0$. Dalla (1.13) e dalla (1.18) si ricava

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left(\log \frac{F}{G}\right) = 0.$$

Da cui

$$F(u,v) = e^{p(u)+q(v)}G(u,v).$$

Dunque,

$$\Phi = G^2\left\{du^2 + e^{2p(u)}e^{2q(v)}dv^2\right\}.$$

Quindi, l'elemento lineare $ds^2$ deve essere proporzionale a

$$e^{-2p(u)}du^2 + e^{2q(v)}dv^2.$$

Allora, le funzioni $(x, y)$ definite dalle equazioni

$$dx = e^{-p(u)}du, \quad dy = e^{q(v)}dv,$$

determinano un sistema di coordiante principali-isoterme.

Viceversa, se $(u, v)$ è un sistema di coordinate principali-isoterme allora si ha:

$$\theta_0^1 = H(u,v)du, \quad \theta_0^2 = H(u,v)dv.$$

Da cui si ricava

$$q_1 = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial v}(\log H), \quad q_2 = -\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial u}(\log H).$$

Pertanto

$$dq_2 \wedge \theta_0^1 - dq_1 \wedge \theta_0^2 = 0. \tag{1.19}$$

Dalla (1.19) e dalla (1.13), si ottiene $p_2 = 0$. ♢

## 2. Deformazione conforme delle superfici.

Contatto analitico.

Siano date due immersioni $f$ ed $\hat{f} : S \longrightarrow \mathbb{E}^3$ e sia $p_0$ un punto di $S$. Diremo che $f$ ed $\hat{f}$ hanno contatto analitico di ordine $k$ in $p_0$ se i loro getti di ordine $k$ coincidono nel punto $p_0$.

Fissiamo un sistema di coordinate locali $(U, t^1, t^2)$ centrate in $p_0$, e siano $F = {}^t(F^0, \dots, F^4)$ ed $\hat{F} = {}^t(\hat{F}_0, \dots, \hat{F}^4)$ dei sollevamenti di $f$ ed $\hat{f}$ in $\mathbb{R}^5$:

$$f(p) = [F(p)], \quad \hat{f} = [\hat{F}(p)], \quad \forall\, p \in U.$$

Con un calcolo diretto si dimostra il seguente Lemma:

Lemma 2.1. *Le immersioni $f$ ed $\hat{f}$ hanno contatto analitico del primo ordine in $p_0$ se e solo se*

$$\hat{F}(p_0) = F(p_0), \quad \delta(\hat{F})|_{p_0} = \rho(p_0)\delta(F)|_{p_0} + \delta(\rho)|_{p_0}F(p_0), \tag{2.1}$$

*dove $\rho = F'^0/F^0$. Il contatto analitico è del secondo ordine se e solo se*

$$\begin{aligned} \hat{F}(p_0) = F(p_0), \qquad \delta(\hat{F})|_{p_0} &= \rho(p_0)\delta(F)|_{p_0} + \delta(\rho)|_{p_0}F(p_0), \\ \delta^2(\hat{F})|_{p_0} &= \rho(p_0)\delta^2(F)|_{p_0} + 2\delta(\rho)|_{p_0}\delta(F)|_{p_0} + \\ &\quad + \delta^2(\rho)|_{p_0}F(p_0). \end{aligned} \tag{2.2}$$

DEFORMAZIONI CONFORMI.

Due superfici $(S, f)$ ed $(S', \hat{f})$ si dicono *deformazioni conformi* l'una dell'altra (o *applicabili*) se esiste un diffeomorfismo $\psi : S \longrightarrow S'$ e se per ogni punto $p \in S$ esiste un intorno aperto $p \in U \subset S$ ed un'applicazione $\mathbf{b} : U \longrightarrow G$ tali che $\mathbf{b}(x)\hat{f} \circ \psi$ ed $f$ abbiano contatto analitico del secondo ordine in $x$, $\forall\, x \in U$. Le applicazioni $\mathbf{b} : U \longrightarrow G$ si dicono spostamenti locali della deformazione.

La deformazione è triviale se possiede degli spostamenti locali costanti. Altrimenti diremo che la deformazione è *effettiva*.

DEFINIZIONE. Una superficie $f : S \longrightarrow \mathbb{E}^3$ si dice *deformabile* se per ogni punto $p \in S$ esiste un intorno $p \in U$ tale che $f|_U$ possieda deformazioni conformi effettive.

PROPOSIZIONE 2.2. *Siano $f : S \longrightarrow \mathbb{E}^3$ ed $f' : S' \longrightarrow \mathbb{E}^3$ due immersioni orientate e prive di punti ombelicali, e sia $\psi : S \longrightarrow S'$ un diffeomorfismo. Allora, $\psi$ è una deformazione conforme se e solo se conserva le forme di volume ed i differenziali quadratici delle superfici.*

*Dimostrazione.* Sia $\psi : S \longrightarrow S'$ una deformazione conforme. Non è restrittivo assumere $S = S'$ e $\psi = \mathrm{id}_S$. Inoltre, per semplicità, supponiamo che lo spostamento locale $\mathbf{b}$ sia definito su tutta la superficie. Scegliamo un riferimento normale $\mathbf{a} : S \longrightarrow P \subset G$ di $f$ e definiamo

$$\mathbf{a}'(p) = \mathbf{b}(p)^{-1}\mathbf{a}(p) \quad \forall\, p \in U.$$

Per costruzione, $\mathbf{a}' : S \longrightarrow P$ è un riferimento di $(S, f')$. Poniamo

$$\theta = (\theta^I_J) = \mathbf{a}^*(\omega), \quad \Theta = (\Theta^I_J) = \mathbf{a}'^*(\omega)$$

ed osserviamo che, per ogni $p_0 \in S$, l'applicazione $\mathbf{b}(p_0)\mathbf{a}' : S \longrightarrow P$ è un riferimento conforme di $(S, \mathbf{b}(p_0)f')$.

Le immersioni $\mathbf{b}(p_0)f'$ ed $f$ hanno contatto analitico del secondo ordine in $p_0$. In particolare, esisteranno $\rho_0$ e $\rho_1$ tali che:

$$\mathbf{b}(p_0)\mathbf{a}'_0(p_0) = \rho_0\mathbf{a}_0(p_0), \tag{2.3}$$

$$\mathbf{b}(p_0)\left[d\mathbf{a}'_0|_{p_0}\right] = \rho_0 d\mathbf{a}_0|_{p_0} + \rho_1\mathbf{a}_0(p_0). \tag{2.4}$$

Poichè $\mathbf{b}(p_0)\mathbf{a}'(p_0) = \mathbf{a}(p_0)$, si ricava $\rho_0 = 1$. Dalla (1.2) otteniamo

$$\mathbf{b}(p_0)\left[d\mathbf{a}'|_{p_0}\right] = \Theta^0_0|_{p_0}\mathbf{a}_0(p_0) + \Theta^a_0|_{p_0}\mathbf{a}_a(p_0), \tag{2.5}$$

$$d\mathbf{a}_0|_{p_0} = \theta_0^0|_{p_0}\mathbf{a}_0(p_0) + \theta_0^a|_{p_0}\mathbf{a}_a(p_0) \tag{2.6}$$

Le (2.3)-(2.6) valgono per ogni $p_0 \in S$, quindi si ha:

$$\theta_0^a = \Theta_0^a \quad a = 1,2,3\,; \quad \rho_0 = 1\,; \quad \rho_1 = (\Theta_0^0 - \theta_0^0). \tag{2.7}$$

Da (2.7) e (2.5) si ricava

$$\mathbf{b}(p)\left[d(\mathbf{a}_0')|_p\right] = d(\mathbf{a}_0)|_p + \left(\Theta_0^0 - \theta_0^0\right)|_p\mathbf{a}(p). \tag{2.8}$$

Imponendo il contatto analitico del secondo ordine, si ottiene

$$\mathbf{b}(p)\delta^2(\mathbf{a}_0')|_p = \delta^2(\mathbf{a}_0)|_p + 2(\Theta_0^0 - \theta_0^0)|_p\delta(\mathbf{a}_0(p)|_p + \rho_2(p)\mathbf{a}_0(p), \tag{2.9}$$

$\forall\, p \in U$, e $\rho_2(p)$ è una 2-forma simmetrica.

Usando la (2.7) e sviluppando i calcoli dei getti del secondo ordine, si ricava

$$\rho_2 = \delta(\Theta_0^0 - \theta_0^0) + (\Theta_0^0 - \theta_0^0)^2 + \sum_{i=1,2}\theta_0^i(\Theta_i^0 - \theta_i^0), \tag{2.10}$$

$$\sum_{i=1,2}\theta_0^i(\Theta_i^3 - \theta_i^3) = 0, \tag{2.11}$$

$$\sum_{k=1,2}\theta_0^k\left[(\Theta_k^i - \theta_k^i) - \delta_k^i(\Theta_0^0 - \theta_0^0)\right] = 0, \quad i = 1,2. \tag{2.12}$$

Da cui si ottiene

$$\Theta_0^i = \theta_0^i, \quad \Theta_i^3 = \theta_i^3, \quad \Theta_0^3 = \theta_0^3 = 0, \quad i = 1,2. \tag{2.13}$$

Allora, $\mathbf{a}'$ è un riferimento normale di $f'$. Quindi, si deduce che

$$\Omega = \Omega', \quad \Phi = \Phi', \quad \Psi = \Psi'.$$

Viceversa: supponiamo che le due immersioni $f$ ed $f'$ inducano su $S$ le stesse forme di volume e gli stessi differenziali quadratici. Fissiamo riferimenti normali $\mathbf{a}$ ed $\mathbf{a}'$ di $f$ ed $f'$ rispettivamente, ed osserviamo che

$$\Theta_0^1 = \varepsilon\theta_0^1, \quad \Theta_0^2 = \varepsilon\theta_0^2, \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{2.14}$$

Eventualmente usando l'azione di $\mathbb{Z}_2$, possiamo supporre $\varepsilon = 1$. Pertanto,

$$\theta_0^1 = \Theta_0^i, \quad i = 1,2 \quad e \quad \Theta_1^3 = \theta_1^3 = \theta_0^1, \quad \Theta_2^3 = \theta_2^3 = -\theta_0^2. \tag{2.15}$$

Da cui

$$\Theta_0^0 = \theta_0^0, \quad \Theta_1^2 = \theta_1^2. \tag{2.16}$$

Definiamo

$$\mathbf{b}(p) = \mathbf{a}'(p)^{-1}\mathbf{a}(p), \quad \forall\, p \in U.$$

Dalla (2.15) e dalla (2.16) si deduce immediatamente che le equazioni (2.7)-(2.12) sono verificate. Allora, le immersioni $\mathbf{b}(p)f$ ed $f'$ hanno contatto analitico del secondo ordine, per ogni $p \in S$. Ciò significa che $f$ ed $f'$ sono deformazioni l'una dell'altra. $\diamondsuit$

PROPOSIZIONE 2.5. *La superficie $f : S \longrightarrow \mathbb{E}^3$ è deformabile se e solo se possiede un atlante di coordinate principali-isoterme.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che $f : S \longrightarrow \mathbb{E}^3$ sia deformabile. Prendiamo una deformazione effettiva, che indichiamo con $f' : S \longrightarrow \mathbb{E}^3$. Non è restrittivo supporre che la deformazione tra le due superfici sia l'identità.

Fissiamo riferimenti normali $\mathbf{a}$ ed $\mathbf{a}'$ di $f$ ed $f'$ rispettivamente. Dalla proposizione 2.4. si ha

$$\Theta_0^1 \wedge \Theta_0^2 = \theta_0^1 \wedge \theta_0^2,$$

$$(\Theta_0^1)^2 + (\Theta_0^2)^2 = (\theta_0^1)^2 + (\theta_0^2)^2,$$

$$(\Theta_0^1)^2 - (\Theta_0^2)^2 = (\theta_0^1)^2 - (\theta_0^2)^2.$$

Quindi

$$\Theta_0^1 = \varepsilon\theta_0^1, \quad \Theta_0^2 = \varepsilon\theta_0^2, \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{2.17}$$

Eventualmente usando l'azione di $\mathbb{Z}_2$ assumiamo $\varepsilon = 1$. Differenziando la (2.17) ricaviamo

$$\Theta_0^0 = \theta_0^0, \quad \Theta_1^2 = \theta_1^2. \tag{2.18}$$

Poniamo

$$\theta_1^0 - \Theta_1^0 = A\theta_0^1 + B\theta_0^2, \quad \theta_2^0 - \Theta_2^0 = -B\theta_0^1 + C\theta_0^2. \tag{2.19}$$

Differenziando (2.18), si ottiene $B = 0$ e $C = -A$. Le due immersioni non sono congruenti, quindi $A$ non può annullarsi identicamente.

Differenziando la (2.19), ed utilizzando le equazioni strutturali del gruppo si ricava

$$(dA + 2Aq_1\theta_0^2) \wedge \theta_0^1 = (dA - 2Aq_2\theta_0^1) \wedge \theta_0^2 = 0.$$

Da cui

$$dA - A\theta_0^0 = 0. \tag{2.20}$$

Ciò implica che se $A$ si annulla in $p \in S$ allora $A = 0$ in un intorno $p \in U$. Pertanto si deve avere $A(p) \neq 0 \, \forall p \in S$. Dalle equazioni di struttura otteniamo

$$d\theta_0^0 = 2p_2\theta_0^1 \wedge \theta_0^2. \tag{2.21}$$

Combinando la (2.20) con la (2.21), si ha

$$p_2 = 0.$$

Quindi la superficie $(S, f)$ è isoterma.

Viceversa, supponiamo $p_2 = 0$. Dalla (2.21) segue che $\theta_0^0$ è una forma chiusa. Prendiamo una primitiva $Q : S \longrightarrow \mathbb{R}$ di $\theta_0^0$ e poniamo

$$A = e^Q : S \longrightarrow \mathbb{R}^+.$$

Definiamo

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_0^0 & \Theta_1^0 & \Theta_2^0 & 0 & 0 \\ \theta_0^1 & 0 & -\theta_1^2 & -\theta_0^1 & \Theta_1^0 \\ \theta_0^2 & \theta_1^2 & 0 & \theta_0^2 & \Theta_2^0 \\ 0 & \theta_0^1 & -\theta_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_0^1 & \theta_0^2 & 0 & -\theta_0^0 \end{pmatrix}$$

dove le $\Theta_j^0$ sono definite nel modo seguente

$$\Theta_1^0 = \theta_1^0 - A\theta_0^1, \quad \Theta_2^0 = \theta_2^0 + A\theta_0^2.$$

$\Theta$ è una 1-forma a valori nell'algebra di Lie di $G$ e verifica le equazioni

$$d\Theta + \Theta \wedge \Theta = 0. \tag{2.22}$$

Combinando la (2.22) con il teorema di Cartan-Darboux, si deduce l'esistenza di un'applicazione

$$\mathbf{a}' : S \longrightarrow G$$

tale che $\mathbf{a}'^*(\omega) = \Theta$. Inoltre, $\mathbf{a}'$ è univocamente determinata, a meno di traslazioni a sinistra.

Preso un punto $p_0 \in S$, scegliamo un intorno $p_0 \in U$ ed una delle applicazioni $\mathbf{a}' : S \longrightarrow G$ in modo che $\mathbf{a}'(p) \in P$, $\forall p \in U$. Quindi poniamo

$$f' : U \longrightarrow \mathbb{E}^3 : \quad f'(p) = \left[\mathbf{a}'_0(p)\right], \quad \forall p \in U.$$

Per costruzione, $\mathbf{a}'$ è un campo normale di $f'$. Pertanto, gli orientamenti ed i differenziali quadratici di $f$ ed $f'$ coincidono. Da ciò segue che $f'$ è una deformazione effettiva di $f|_U$. ♢

Osservazione. Le deformazioni di una superficie isoterma semplicemente connessa dipendono da una costante arbitraria. Equivalentemente, assegnata una superficie isoterma $(S, f)$, si può costruire una famiglia ad un parametro di superfici isoterme formata dalle deformazioni effettive di $(S, f)$.

## 3. Il sistema differenziale delle superfici isoterme.

Poniamo $N = P \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ e denotiamo con $(q_1, q_2)$ e con $(p_1, p_2, p_3)$ le coordinate di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente. Su $N$ fissiamo il coriferimento $(\eta^\alpha, \omega^i, \mu^i, \zeta^a)$:

$$\omega^i = \omega^i_0, \quad \mu^i = dq_i, \quad \zeta^a = dp_a \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
\eta^1 &= \omega^3_0, & \eta^2 &= \omega^1 - \omega^3_1, \\
\eta^3 &= \omega^2 + \omega^3_2, & \eta^4 &= \omega^0_3, \\
\eta^5 &= \omega^2_1 - q_1\omega^1 - q_2\omega^2, & \eta^6 &= \omega^0_0 + 2q_2\omega^1 - 2q_1\omega^2, \\
\eta^7 &= \omega^0_1 - p_1\omega^1 - p_2\omega^2, & \eta^8 &= \omega^0_2 + p_2\omega^1 - p_3\omega^2.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Consideriamo il sistema di Pfaff definito dai sottofibrati

$$I = \operatorname{Span}\{\eta^\alpha\} \subset J = \operatorname{Span}\{\eta^\alpha, \omega^i\} \subset T^*(N).$$

Sia $f : S \longrightarrow \mathbb{E}^3$ una superficie senza punti ombelicali, e sia $\mathbf{a} : S \longrightarrow P$ un riferimento normale. Definiamo la sottovarietà integrale $\Sigma : S \longrightarrow N$ ponendo

$$\Sigma(x) = (\mathbf{a}(x), q_i(x), p_a(x)), \quad \forall x \in S.$$

Si ottengono così tutte le sottovarietà integrali del sistema $(I, J)$.

Il sistema differenziale delle superfici isoterme.

Le superfici isoterme sono le soluzioni del sistema di Pfaff ottenuto dalla restrizione di $(I, J)$ sulla sottovarietà $M \subset N$, definita dalla equazione $p_2 = 0$. Per semplicità, continueremo ad indicare con $(I, J)$ la restrizione del sistema su $M$. Poniamo $\xi^1 = \zeta^1$ e $\xi^2 = \zeta^3$, e consideriamo il parallelismo di $M$ determinato dalle forme $(\omega^i, \eta^\alpha, \mu^i, \xi^i)$.

Le equazioni strutturali del sistema si ottengono differenziando (3.1) e (3.2). Dalla (1.2) e (1.3) otteniamo

$$d\eta^1 = d\eta^2 = d\eta^3 = d\eta^4 = 0 \quad \mathrm{mod}\{I\}, \tag{3.3}$$

e

$$\begin{aligned}
d\eta^5 &= -\mu^1 \wedge \omega^1 - \mu^2 \wedge \omega^2 + \\
&\quad + (1 + p_1 + p_3 + q_1^2 + q_2^2)\omega^1 \wedge \omega^2 \quad \mathrm{mod}\{I\}, \\
d\eta^6 &= 2\mu^2 \wedge \omega^1 - 2\mu^1 \wedge \omega^2 \quad \mathrm{mod}\{I\}, \\
d\eta^7 &= -\xi^1 \wedge \omega^1 + q_1(3p_1 + p_3)\omega^1 \wedge \omega^2 \quad \mathrm{mod}\{I\}, \\
d\eta^8 &= \xi^2 \wedge \omega^2 + q_2(p_1 + 3p_3)\omega^1 \wedge \omega^2 \quad \mathrm{mod}\{I\},
\end{aligned} \tag{3.4}$$

dove $\{I\}$ indica l'ideale algebrico generato dalle forme $\eta^\alpha$.

Dalla (3.3) e dalla (3.4), segue che il sistema è quasi-lineare ed inoltre, la "reduced tableau matrix" del sistema è

$$\begin{pmatrix} -\mu^1 & -\mu^2 \\ 2\mu^2 & -2\mu^1 \\ -\xi^1 & 0 \\ 0 & -\xi^2 \end{pmatrix}.$$

Allora, i caratteri ridotti di Cartan sono

$$s_1' = 4, \quad s_2' = 0. \tag{3.5}$$

Fissiamo $m \in M$ ed effettuiamo i calcoli in $m$. Le equazioni di un elemento integrale bidimensionale sono

$$\begin{aligned}
\eta^\alpha &= 0, \qquad \alpha = 1, \dots, 8; \\
\mu^i &= M^i_j \omega^j, \quad \xi^i = X^i_j \omega^j, \ i = 1, 2,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

a cui aggiungiamo le equazioni che si ricavano sostituendo (3.6) in (3.4):

$$M_2^1 - M_1^2 + (1 + p_1 + p_3 + q_1^2 + q_2^2) = 0;$$

$$-M_2^2 - M_1^1 = 0;$$

$$X_2^1 + q_1(3p_1 + p_3) = 0$$

$$-X_1^3 + q_2(p_1 + 3p_3) = 0.$$

Di conseguenza, gli elementi integrali in $m$ formano una sottovarietà affine quadridimensionale di $G_2(TM)_m$. Ricordando la (3.5), vediamo che le ipotesi del test di Cartan sono verificate. Quindi possiamo enunciare la seguente Proposizione:

PROPOSIZIONE 3.2. *Il sistema differenziale delle superfici isoterme è involutivo e le sue soluzioni dipendono da quattro funzioni arbitrarie in una variabile.*

Fissiamo un elemento integrale unidimensionale $L \subset T(M)_m$, e poniamo

$$L = \mathrm{Span}\left\{h^i \frac{\partial}{\partial \omega^i} + m^i \frac{\partial}{\partial \mu^i} + x^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}\right\}, \tag{3.7}$$

dove

$$\frac{\partial}{\partial \omega^i}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta^\alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial \mu^i}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi^i}$$

sono i campi vettoriali duali alle forme del parallelismo. Dalla (3.7) e dalla (3.4) si ricava che le equazioni del sottospazio polare $H(L)$ di $L$ sono:

$$\eta^\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \dots, 8;$$

$$\begin{aligned}
h^1\mu^1 + h^2\mu^2 &= \left[m^1 - (1 + p_1 + p_3 + q_1^2 + q_2^2)h^2\right]\omega^1 + \\
&\quad + \left[m^2 + (1 + p_1 + p_3 + q_1^2 + q_2^2)h^1\right]\omega^2\,; \\
h^2\mu^2 - h^2\mu^1 &= -m^2\omega^1 + m^1\omega^2\,; \\
h^1\xi^1 &= \left[x^1 - q_1(3p_1 + p_3)h^2\right]\omega^1 + q_1(3p_1 + p_3)h^1\omega^2\,; \\
h^2\xi^2 &= q_2(p_1 + 3p_3)h^2\omega^1 + \left[x^2 - q_2(p_1 + 3p_3)h^1\right]\omega^2\,.
\end{aligned}$$

Se $h^1 h^2 \neq 0$, allora $\dim H(L) = 2$ e quindi il sottospazio polare è l'unico elemento integrale bidimensionale che contiene $L$. Riassumendo:

LEMMA 3.3. *Sia $L$ un elemento integrale 1-dimensionale di $(I, J)$. Se $h^1 h^2 \neq 0$, allora $L$ è $K$-regolare. Inoltre, esiste un unico elemento integrale bidimensionale $H(L)$ che lo contiene.*

Una curva integrale $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ di $(I, J)$ si dice *regolare* se, per ogni $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, la retta tangente a $\gamma$ in $\tau$ verifica $h^1 h^2 \neq 0$. Dal lemma 3.3 e dal teorema di Cartan-Kähler (cfr.[5]) ricaviamo:

LEMMA 3.4. *Data una curva regolare ed analitica $\gamma(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, esiste un'unica sottovarietà integrale analitica $F(t, s) : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon', \varepsilon') \longrightarrow M$ tale che $F(t, 0) = \gamma(t)$.*

Da cui il teorema:

TEOREMA 3.5. *Siano date quattro funzioni analitiche $s_i(t)$, $r_i(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, ed un elemento $\mathbf{b} \in P$, esiste allora un'unica superficie analitica $(\Omega, f)$ definita in un intorno $\Omega$ dell'origine di $\mathbb{R}^2$ ed un unico riferimento normale $\mathbf{a} : \Omega \longrightarrow P$ di $(\Omega, f)$ tali che:*

(i) *$(\Omega, f)$ sia una superficie isoterma.*

(ii) $\mathbf{a}(0, 0) = \mathbf{b}$; $\quad q_i(t, 0) = s_i(t),\ 1 \leq i \leq 2$;
$p_1(t, 0) = r_1(t), \quad p_3(t, 0) = r_2(t)$.

(iii) $f^*(\theta_0^1)|_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times\{0\}} = f^*(\theta_0^2)|_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times\{0\}} = dt$.

*Dimostrazione.* Date le funzioni $s_i(t)$ ed $r_i(t)$, $i = 1, 2$, consideriamo la 1-forma a valori nell'algebra di Lie di $G$:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2(s_1 - s_2) & r_1 & r_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -(s_1 + s_2) & -1 & r_1 \\ 1 & (s_1 + s_2) & 0 & 1 & r_2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2(s_2 - s_1) \end{pmatrix} dt.$$

Questa è una forma analitica e le condizioni d'integrabilità

$$d\Lambda + \Lambda \wedge \Lambda = 0$$

sono automaticamente verificate. Allora, esiste un'unica curva analitica

$$\mathbf{c}(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow G$$

tale che

$$c^{-1}\, d\mathbf{c} = \Lambda, \quad \mathbf{c}(0) = \mathbf{b}.$$

Siccome $\mathbf{b} \in P \subset G$, possiamo restringere il dominio di definizione in modo che $\mathbf{c}(t) \in P$, $\forall\, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Definiamo $\gamma(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ nel modo seguente:

$$\gamma(t) = (\mathbf{c}(t), s_i(t), r_i(t))\,, \quad \forall\, t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Per costruzione, $\gamma(t)$ è una curva regolare ed analitica. Quindi, dal lemma 3.4 si deduce l'esistenza di un'unica sottovarietà integrale analitica

$$\Sigma : \Omega = (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$$

tale che $\Sigma(t, 0) = \gamma(t)$, $\forall\, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Poniamo

$$\Sigma(t, s) = (\mathbf{a}(t, s); q_1(t, s), q_2(t, s); p_1(t, s), p_3(t, s));$$

$$f(t, s) = [\mathbf{a}_0(t, s)].$$

La $(\Omega, f)$ è una superficie isoterma, $\mathbf{a} : \Omega \longrightarrow P$ è un riferimento normale e le $q_i$ e le $p_a$ sono le funzioni invarianti. Con ciò il teorema è provato.

Per quanto riguarda l'unicità, procediamo nel modo seguente: supponiamo di avere una seconda superficie $(\Omega, f')$ che verifichi le stesse condizioni. Indichiamo con $\mathbf{a}' : \Omega \longrightarrow P$ il suo riferimento normale, con $\Sigma' : \Omega \longrightarrow M$ il suo sollevamento in $M$, e sia $\gamma'(t)$ la restrizione di $\Sigma'$ su $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \{0\}$. Da (i), (ii) e (iii) ricaviamo

$$\gamma'(t) = (\mathbf{c}'(t), s_i(t), r_i(t)).$$

Inoltre, $\mathbf{c}'(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow G$ è la soluzione dell'equazione differenziale ordinaria ${c'}^{-1} d\mathbf{c}' = \Lambda$ che verifica la condizione iniziale $\mathbf{c}'(0) = \mathbf{b}$.

Allora, $\gamma$ e $\gamma'$ coincidono e quindi, usando il lemma 3.4, avremo $\Sigma = \Sigma'$ in un intorno dell'origine di $\mathbb{R}^2$. $\diamondsuit$

## BIBLIOGRAFIA


[1] BIANCHI L., *Complementi alle ricerche sulle superfici isoterme*, Ann. Mat. pura ed appl. (3), **12** (1906), 19-54.

[2] BLASCHKE W., *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Vol. **3**, Springer, Berlin, (1929).

[3] BOUR, *Mémoire sur la déformation des surfaces*, Journal de l'École Polytecnique, Vol. **XXXIX** (1862).

[4] BRYANT R., *A duality theorem for Willmore surfaces*, J. Differential Geometry **20** (1984), 23-54.

[5] BRYANT R. L., CHERN S. S., GARDNER R. B., GOLDSCHMIDT H. L. and GRIFFITHS P. A., *Exterior Differential Systems*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1991.

[6] BURSTALL F., HERTRICH-JERONIM U., PEDIT F. and PINKALL U., *Curved Flats and Isothermic Surfaces*, Preprint, November 1994.

[7] CALAPSO P., *Sulle superfici a linee di curvatura isoterme*, Rend. Circ. Matem. Palermo, t. **XVII** (1903), 275-286.

[8] CALAPSO P., *Sugl'invarianti del gruppo delle trasformazioni conformi dello spazio*, Rend. Circ. Matem. Palermo, t. **XXII** (1906), 197-213.

[9] CALAPSO P., *Sulle trasformazioni delle superfici isoterme*, Ann. Mat. pura ed appl. (3), **24** (1915), 11-48.

[10] CARTAN É., *Sur le problème général de la déformation*, C. R. Congrès Strasbourg (1920), 397-406; or Oeuvres Complètes, III **1**, 539-548.

[11] CARTAN É., *Les systèmes différentiels exterieurs et leurs applications géométriques*, Hermann, Paris, 1945.

[12] CHRISTOFFEL E. B., *Ueber einige allegemeine Eigenschaften der Minimumssflächen*, Crelle, Vol. **57** (1867), 218-228.

[13] CIESLINSKI J., GOLDSTEIN P. and SYM A., *Isothermic Surfaces in* $\mathbb{E}^3$ *as Soliton Surfaces*, Physics Letters A **205** (1995), 37-43.

[14] DARBOUX G., *Leçons sur la théorie générale des Surfaces*, Chelsea publishing company, Bronx, New York, 1972.

[15] FERUS D. and PEDIT F., *Curved Flats in Symmetric Spaces*,manuscript 1993.

[16] FUBINI G., *Applicabilità proiettiva di due superfici*, Rend. Circ. Mat. Palermo, t. **XLI** (1916), 1-28.

[17] GRIFFITHS P., *On Cartan's method of Lie group and moving frames as applied to uniqueness and existence questions in Differential geometry*, Duke Math. J., **41** (1974), 775-814.

[18] JENSEN G. R., *Higer order contact of submanifolds of homogeneous spaces*, Lecture Notes in Math., Vol. **610**, Springer, Berlin, 1977.

[19] JENSEN G. R., *Deformation of submanifolds of homogeneous spaces*, J. Differential Geometry **16** (1981), 213-246.

[20] MALLIAVIN P., *Géometrie différentielle intrinséque*, Hermann, Paris, 1972.

[21] SCHIEMANGK C. and SULANKE R., *Submanifolds of the Möbius space*, Math. Nachr. **96** (1980), 165-183.

[22] TRESSE A., *Sur les invariants différentielle d'une surface par rapport aux transformations conformes de l'espace*, Competes rendus de l'Academie des Sciences, Vol. **CXIV** (1892), 948-950; Acta mathematica, t. **18**, Chap. 2 (1894).

[23] VESSIOT E., *Contribution a la géometrie conforme. Théorie des surfaces*, Bull. Soc. Math. France, **54** (1926), 139-176, **55** (1927), 39-79.