SOTTOVARIETÀ SPECIALI DELLO SPAZIO DEI TWISTORS (*)

by Massimiliano Migliorini (in Firenze)(**)

Sommario. - *Si studiano alcune proprietà del luogo integrabile del twistor space di una varietà Riemanniana. Nella prima parte del lavoro si determina il luogo integrabile del twistor space dello spazio proiettivo complesso mentre nella seconda parte si studia il luogo integrabile del twistor space di una varietà quadridimensionale, in particolare si prova che se la parte autoduale del tensor di Weyl è non nulla tale luogo interseca ogni fibra in 4 punti.*

Summary. - *We study some properties of the integrable locus of the twistor space of a Riemannian manifold. In the first part we describe completely such locus for the twistor space of the complex projective spaces while in the second part we study the integrable locus of the twistor space of a four-dimensional Riemannian manifold. In particular we prove that if the selfdual part of the Weyl tensor does not vanish the integrable locus intersect every fibre in 4 points.*

1. Introduzione.

In anni recenti, una delle possibili strategie di attacco del problema dell'esistenza di strutture complesse su una varietà differenziabile, si è fondata sulla teoria degli spazi dei Twistor.
Data una varietà Riemanniana n-dimensionale orientata (M, g), si considera il fibrato

$$Z(M,g) \stackrel{\text{def}}{=} SO_g(M) \times_{SO(2n)} Z(n) = \frac{SO_g(M)}{U(n)}$$

(*) Pervenuto in Redazione il 22 settembre 1994.

(**) Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Matematica "U. Dini", Viale Morgagni 67/A, 50134 Firenze (Italia).

(detto spazio dei Twistors di M); le sezioni globali di $Z(M,g)$ corrispondono in modo diretto a strutture quasi complesse su M compatibili con la metrica e l'orientazione assegnate.
Inoltre $Z(M,g)$ ammette una struttura quasi complessa $\mathcal{J}$ (che dipende solo dalla classe conforme di g) in modo che le sezioni globali $\mathcal{J}$-invarianti corrispondano a strutture quasi complesse integrabili su M e l'esistenza locale di una sezione $\mathcal{J}$-invariante per $P \in Z(M,g)$ assicuri che il tensore di Nijenhuis di $\mathcal{J}$, $N(\mathcal{J})$, si annulla in P.
È pertanto assai rilevante, nella ricerca di sezioni globali $\mathcal{J}$-invarianti, lo studio del luogo degli zeri $W(M)$ di $N(\mathcal{J})$.
In questo lavoro si fornisce una descrizione diretta ed esplicita di $W(M)$ in due casi particolari:

1) $M = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (semplificando notevolmente, tra l'altro, una costruzione generale dovuta a F. Burstall e J. Rawnsley [Bu-Ra]);
2) $dim_{\mathbb{R}} M = 4$.

Desidero ringraziare il Prof. Paolo de Bartolomeis per avermi proposto il problema e per i suggerimenti durante il lavoro.
Il referee mi ha segnalato che i due recenti lavori [Ga] , [Kob] contengono risultati collegati al problema discusso nella sezione 3.

1. Il Twistor Space di una Varietà Riemanniana.

Ricordiamo brevemente la costruzione ed alcune proprietà fondamentali dello spazio dei twistors.

DEFINIZIONE 1.1. Sia (M,g) una varietà Riemanniana orientata $2n$-dimensionale e sia $SO_g(M)$ il fibrato principale dei riferimenti ortogonali orientati di M. Si dice *twistor space di M* il fibrato associato

$$Z(M,g) \overset{\text{def}}{=} SO_g(M) \times_{SO(2n)} Z(n) = \frac{SO_g(M)}{U(n)}$$

essendo $Z(n) = \dfrac{SO(2n)}{U(n)}$.
Siano

$$\pi : SO_g(M) \longrightarrow Z(M,g)$$
$$r : Z(M,g) \longrightarrow M$$

le proiezioni di fibrato; allora dato $x \in M$
$Z_x = r^{-1}(x) = \{P \in SO_{g(x)}(M) \mid P = -{}^tP, P > 0\}$ dove '$P > 0$' significa che P induce l'orientazione assegnata.
Dunque Z_x è l'insieme delle strutture complesse su $T_x(M)$ compatibili con la metrica e l'orientazione assegnata. Inoltre dato $P \in Z_x$ si ha

$$T_P(Z_x) = \{X \in so_{g(x)}(T_x(M)) \mid XP = -PX\}.$$

$Z(M,g)$ ammette una naturale struttura di varietà quasi complessa: infatti, dati $P \in Z(M,g)$ e $X \in T_P(Z(M,g))$, possiamo definire

$$\mathcal{J}(P)(X) = (r_*^{-1} \circ P \circ r_*)(X_h) + P \circ X_v$$

essendo $X = X_h + X_v$ la scomposizione indotta dalla connessione di Levi-Civita.
Un risultato generale della teoria delle varietà quasi complesse è rappresentato dal seguente

Teorema 1.2. (Newlander & Nirenberg [Ne-Ni]. *Sia J una struttura quasi complessa su una varietà M, allora J è integrabile se e solo se $N_J \equiv 0$ essendo*

$$N_J(X,Y) = 2\{[JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] - [X,Y]\} \quad X,Y$$

campi vettoriali su M.

Per $(Z(M,g),\mathcal{J})$ si ha

Proposizione 1.3. (cfr. e.g. [Sa]) *Dato $P \in Z(M,g)$; $N_{\mathcal{J}}(P)$ è orizzontale e a valori verticali, cioè:*

1) $N_{\mathcal{J}}(P)(X,Y) = 0$ *se uno dei campi X,Y è verticale;*

2) $N_{\mathcal{J}}(P)(\Theta_j,\Theta_k) \in V_p \qquad \forall j,k = 1,\dots,2n$

più precisamente:

$$N_{\mathcal{J}}(P)(\Theta_j,\Theta_k) = -8P\{\pi_{1P}(K(\pi_{1P}(\vartheta_j \wedge \vartheta_k)))+$$

$$+P\pi_{1P}(K(P\pi_{1P}(\vartheta_j \wedge \vartheta_k)))\} =$$

$$= -8P\{\pi_{1P}(W(\pi_{1P}(\vartheta_j \wedge \vartheta_k))) + P\pi_{1P}(W(P\pi_{1P}(\vartheta_j \wedge \vartheta_k)))\}$$

dove:
dati ϑ_i $i = 1, \ldots, 2n$ *campi vettoriali su* M *e detti* $\hat{\vartheta}_i$ *i relativi sollevamenti orizzontali* $\Theta_i = \pi_* \hat{\vartheta}_i$*;*
K *è il tensore di curvatura e* W *è il tensore di Weyl della connessione di Levi-Civita su* $SO_g(M)$*;*
π_{1P} *è la proiezione*

$$\begin{array}{rcl} \pi_{1P} : so(2n) & \longrightarrow & s_P = \{X \in so(2n) \mid XP = -PX\} \\ A & \mapsto & \frac{1}{2}(A + PAP) \end{array}$$

ed è stata fatta l'identificazione $\wedge^2(T_x(M)) = so(2n)$.
Da questa segue agevolmente (cfr. anche At-Hi-Si per $dim_{\mathbb{R}} M = 4$)

$$N_{\mathcal{J}} = 0 \iff \begin{cases} W = 0 & \text{se n>2} \\ W_+ = 0 & \text{se n=2} \end{cases}.$$

La proposizione mostra che $(Z(M,g), \mathcal{J})$ è una varietà complessa solo sotto ipotesi assai restrittive, in particolare per n>2. In generale è interessante studiare il luogo $W(M)$ degli zeri del tensore di $N_{\mathcal{J}}$. In questo lavoro ci occuperemo della descrizione di $W(M)$ per $M = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ e $dim_{\mathbb{R}} M = 4$.

Ricordiamo brevemente la presentazione di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ come spazio simmetrico:

PROPOSIZIONE 1.4. *L'applicazione*

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \dfrac{SU(n+1)}{S(U(1) \times U(n))} & \longrightarrow & \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \\ \begin{pmatrix} z_0 & A_1 & \ldots & A_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_n & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} & \mapsto & [z_0, \ldots, z_n] \end{array}$$

è un diffeomorfismo.

PROPOSIZIONE 1.5. *La proiezione*

$$\Xi : SU(n+1) \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \cong \frac{SU(n+1)}{S(U(1) \times U(n))}$$

è una fibrazione principale con gruppo di struttura $S(U(1) \times U(n))$.

Possiamo considerare $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ come spazio simmetrico ed introdurre una connessione in $SU(n+1)$,in modo standard, ponendo

$$H_A \stackrel{\text{def}}{=} (L_A)_* m$$

dove $m = \dfrac{su(n+1)}{su(1) \times u(n))}$.
La 2-forma di curvatura associata è $\Omega_A = -\frac{1}{2}[\theta_A^m, \theta_A^m]$, dove θ_A^m è la componente a valori in m della forma di Maurer-Cartan. Inoltre, detta B la forma di Killing in $su(n+1)$, si ha $B_{|m \times m}(X,Y) = c\mathbb{R}e(\langle\ ,\ \rangle) \stackrel{\text{def}}{=} \langle\ ,\ \rangle_m$, per cui, estendendo tale prodotto per $SU(n+1)$-invarianza

$$\langle X, Y \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle A^{-1}X, A^{-1}Y \rangle_m \quad \forall X, Y \in H_A$$

otteniamo una metrica su $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, detta *metrica di Fubini-Study.*

Proposizione 1.6.

$$SO_{F.S.}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = SU(n+1) \times_\rho SO(2n)$$

dove, indicato con i_r l'immersione reale di $U(n)$ in $SO(n)$, si è posto:

$$\begin{array}{rcl} \rho : S(U(1) \times U(n)) & \longrightarrow & SO(2n) \\ \begin{pmatrix} e^{i\vartheta} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} & \mapsto & i_r(e^{-i\vartheta}B) \ . \end{array}$$

Questa rappresentazione ci dà modo di estendere la connessione precedentemente costruita su $SU(n+1)$ a $SO_{F.S.}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ ponendo

$$H_{(A,B)}(SO_{F.S.}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))) =$$
$$= \{(A\tilde{m} + AX, -L_\rho(X)B) \mid \tilde{m} \in m,\ X \in s(u(1) \times u(n))\}$$

dove L_ρ indica la derivata di ρ.
La forma di connessione associata risulta

$$\omega_{(A,B)}(A\tilde{m} + AX, sB) = (AX, sB) = (0, L_\rho(X)B + sB)$$

e la curvatura è, indicato per semplicità $\Omega_{(I_d,I_d)}$ con Ω_I,

$$\tilde{\Omega}_I = (0, L_\rho \Omega_I(\ ,\ )) = (0, -\frac{1}{2} L_\rho(\theta^m_{I_d}, \theta^m_{I_d})).$$

Per quanto riguarda il tensore di curvatura K si ha:
posto

$$\begin{aligned} \eta_A(X) &= X - AXA \\ \nu_A(X) &= tr(\tfrac{X-AXA}{2} A)A. \end{aligned}$$

η, ν hanno le seguenti proprietà :

1) η è $SO(2n)$ invariante

$$\begin{aligned} \eta_{(G\cdot A)}(X) &= \eta_{(GAG^{-1})}(X) = X - GAG^{-1}XGAG^{-1} = \\ &= G\,\eta_A(G^{-1}XG)G^{-1} = (G \cdot \eta_A)(X); \end{aligned}$$

2) $\nu_J(X) = \dfrac{tr((X - JXJ)J)}{2} J;$

3) ν è equivariante

$$\begin{aligned} \nu_{(G\cdot A)}(X) &= tr(\tfrac{X-GAG^{-1}XGAG^{-1}}{2} GAG^{-1})GAG^{-1} = \\ &= G\,tr(G^{-1}\tfrac{(X-GAG^{-1}XGAG^{-1})}{2} GA)AG^{-1} = \\ &= G\,tr(\tfrac{(G^{-1}XG-AG^{-1}XGA)}{2} A)AG^{-1} = (G \cdot \nu_A)(X); \end{aligned}$$

4) $K_I(X) = \frac{1}{2}(\eta_J(X) - \nu_J(X))$; dove $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}$

5) Consideriamo l'azione di $SO(2n)$ su K_I:
$2K_{B\cdot I}(X) = 2BK_I(B^{-1}XB)B^{-1} =$
$= B(\eta_J(B^{-1}XB) - \nu_J(B^{-1}XB))B^{-1} = \eta_{B\cdot J}(X) - \nu_{B\cdot J}(X)$
dalla quale segue, attraverso un semplice calcolo, che la $SO(2n)$-orbita di K_I è , come spazio omogeneo, $\dfrac{SO(2n)}{U(n)}$.

Inoltre, dalla proposizione precedente segue che, nel caso $(M, g) = (\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), F.S.)$,

$$Z(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), F.S.) = \frac{SU(n+1) \times_\rho SO(2n)}{U(n)} = SU(n+1) \times_\rho \frac{SO(2n)}{U(n)}$$

cioè il twistor space è l'insieme delle classi S, P secondo la relazione $S, P = SC, \rho({}^tC)P\rho(C)$ se $C \in S(U(1) \times U(n))$.

2. Il luogo degli zeri del tensore di Nijenhuis per il twistor space dello spazio proiettivo complesso.

Il primo passo nella descrizione di $W(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ è costituito dal seguente

LEMMA 2.1. *Sia $(V, J, \langle\ ,\ \rangle)$ uno spazio vettoriale hermitiano di dimensione $2n$ e sia $L \in End(V)$ tale che*

1) $L = -{}^tL$;

2) $LJ = -JL$;

allora esiste una base ortonormale di V, $B = \{v_1, Jv_1, \ldots, v_n, Jv_n\}$, tale che la matrice associata all'endomorfismo L relativamente alla base B ha la forma

$$M(L) = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \ldots & t_{1n} & 0 \\ 0 & -t_{11} & \ldots & 0 & -t_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{n1} & 0 & \ldots & t_{nn} & 0 \\ 0 & -t_{n1} & \ldots & 0 & -t_{nn} \end{pmatrix}$$

con $T = (t_{ij}) \in so(n)$.

Dimostrazione. Poichè Ker$L$ è J invariante, possiamo limitarci a considerare Im$L = (\text{Ker}L)^\perp$ o, equivalentemente, a considerare L non singolare. Fissata una base di V sia $\hat{L}$ la matrice associata a L; $\hat{L}$ è antisimmetrica per cui è possibile determinare $A \in SO(2n)$ tale che :

$$\hat{L} =^t A \begin{pmatrix} 0 & \vartheta_1 & \dots & 0 & 0 \\ -\vartheta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vartheta_n \\ 0 & 0 & \dots & -\vartheta_n & 0 \end{pmatrix} A$$

con $\vartheta_i \neq 0 \; \forall i = 1, \dots, n$ in quanto L è non singolare.
Posto

$$S = {}^t\!A \begin{pmatrix} \vartheta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \vartheta_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \vartheta_n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vartheta_n \end{pmatrix} A = \sqrt{-\hat{L}^2}$$

risulta
$\hat{L}, S = 0$
$\hat{L}, S^{-1} = 0.$
Sia $P = S^{-1}\hat{L}$, allora $SP = \hat{L}$ e $PS = \hat{L}$ per cui P, S=0.
Inoltre P è antisimmetrica :
${}^tP =^t \hat{L}{}^tS^{-1} =^t \hat{L}S^{-1} = -\hat{L}S^{-1} = -S^{-1}\hat{L} = -P$
e $P \in SO(2n)$:
$P{}^tP = S^{-1}\hat{L}{}^t(S^{-1}\hat{L}) = -S^{-1}\hat{L}^2S^{-1} = I =^t PP.$
Quindi possiamo scrivere $\hat{L} = SP$ con $S =^t S$, $P = -{}^tP = -P^{-1}$ e $S, P = 0$. Osserviamo che se V_{λ_i} è un autospazio di $\hat{L}$ con autovalore λ_i allora è J-invariante ed è anche un autospazio di S con autovalore $\sqrt{\lambda_i}$. Da questo segue che S, J=0. Come conseguenza di queste osservazioni, abbiamo che ogni autospazio di S è J-invariante e P-invariante, quindi possiamo limitarci a considerare gli S-autospazi o, equivalentemente, porre $S = I$. Dunque ci basta dimostrare il lemma nel seguente caso particolare.

Sia $(V, J, \langle\ ,\ \rangle)$ *uno spazio vettoriale di dimensione* $2n$ *e sia* $P \in End(V)$ *tale che*

1) $P \in SO(2n)$;

2) ${}^tP = -P$;

3) $PJ = -JP$;

allora esiste una base ortonormale di V, $B = \{v_1, Jv_1, \ldots, v_n, Jv_n\}$, *tale che la matrice associata all'endomorfismo* P *relativamente alla base* B *è*

$$M(P) = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \ldots & t_{1n} & 0 \\ 0 & -t_{11} & \ldots & 0 & -t_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{n1} & 0 & \ldots & t_{nn} & 0 \\ 0 & -t_{n1} & \ldots & 0 & -t_{nn} \end{pmatrix}$$

con

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in so(n).$$

Abbiamo $n = 2k$, procediamo per induzione su k:

1) $k = 1$:
poichè J, P, JP determinano una struttura quaternionica su V possiamo scegliere $v \in V$ con $v \neq 0$ e considerare la base $\{v, Jv, Pv, JPv\}$.
Questa base soddisfa le richieste in quanto

$$M(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

2) Assumiamo che il risultato sia vero per $\dim V \leq 4(k-1)$.

3) Sia $\dim V = 4k$;
sia $v_1 \in V$, $v_1 \neq 0$ e sia $V_1 \stackrel{\text{def}}{=} \langle v_1, Jv_1, Pv_1, JPv_1 \rangle$. V_1 è J-invariante e P-invariante, di conseguenza anche $W \stackrel{\text{def}}{=} V_1^{\perp}$ è J-invariante e P-invariante.

Possiamo applicare l'ipotesi induttiva per dedurre che esiste una base $\tilde{B} = \{v_3, Jv_3, \dots, v_n, Jv_n\}$ di W tale che

$$M(P_{|W}) = \begin{pmatrix} t'_{11} & 0 & \dots & t'_{1(n-1)} & 0 \\ 0 & -t'_{11} & \dots & 0 & -t'_{1(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t'_{(n-1)1} & 0 & \dots & t'_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & -t'_{(n-1)1} & \dots & 0 & -t'_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

e

$$T' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in so(n-1).$$

Dunque $B = \{v_1, Jv_1, Pv_1, JPv_1, v_3, Jv_3, \dots, v_n, Jv_n\}$ è la base richiesta. $\diamondsuit$

Siamo adesso in grado di dimostrare il seguente

Teorema 2.2. Se $Q = S, P \in Z(\,\mathbb{P}^n(\mathbb{C})\,)$ allora

$$N_{\mathcal{J}}(Q) \equiv 0 \iff P \in u(n) \cap SO(2n).$$

Dimostrazione
Essendo

$$N_{\mathcal{J}}(Q) = 0 \iff \pi_{1P}(K_I(\pi_{1P}(A))) + P\pi_{1P}(K_I(P\pi_{1P}(A))) = 0$$
$$\forall A \in so(2n),$$

si deduce immediatamente che per $A \in u_P$

$$\pi_{1P}(K_I(\pi_{1P}(A))) + P\pi_{1P}(K_I(P\pi_{1P}(A))) = 0$$

dunque è sufficiente limitare la nostra attenzione ad $A \in s_P$. In questo caso abbiamo

$$\pi_{1_P}(K_I(\pi_{1P}(A))) + P\pi_{1P}(K_I(P\pi_{1P}(A))) =$$

$$= \pi_{1_P}(K_I(A)) + P\pi_{1P}(K_I(PA)) =$$

$$= \frac{1}{2}(\pi_{1_P}(A - JAJ - tr(\frac{(A - JAJ)}{2}J)\,J) +$$

$$+P\pi_{1_P}(PA - JPAJ - tr(\frac{(PA - JPAJ)}{2}J)\,J)) =$$

$$= \frac{1}{4}(A - JAJ + PAP - PJAJP - tr(AJ)(J + PJP) +$$

$$+P(PA - JPAJ + PPAP - PJPAJP - tr(PAJ)(J + PJP)) =$$

$$= \frac{1}{4}(2A - JAJ - PJAJP + tr(AJ)PP, J - A - PJPAJ - A + JPAJP -$$

$$-tr(PAJ)P, J) =$$

$$= \frac{1}{4}(P, JAP, J + tr(AJ)PP, J - tr(PAJ)P, J).$$

Dunque

$$N_{\mathcal{J}}(Q) = 0 \iff P, JAP, J + tr(AJ)PP, J - tr(PAJ)P, J = 0$$

$$\forall A \in s_P.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} tr(AJ) &= -\tfrac{1}{2}tr(APP, J) \\ tr(PJA) &= -\tfrac{1}{2}tr(AP, J) \end{aligned}$$

per cui la condizione di integrabilità diventa

$$P, JAP, J = \frac{1}{2}tr(APP, J)PP, J - \frac{1}{2}tr(AP, J)P, J \;\; \forall A \in s_P.$$

Sia $B \in SO(2n)$ tale che $P = BJ^tB$; allora posto

$$\begin{aligned} &H =^t BP, JB \in s(n) \\ &X =^t BAB \in s(n) \end{aligned}$$

la condizione di integrabilità può essere riscritta come

$$HXH = -\frac{1}{2}tr(XH)H + \frac{1}{2}tr(XJH)JH \;\; \forall X \in s(n).$$

Per il lemma precedente e per il fatto che $ad(C) \in Aut(s(n))$ per $C \in U(n)$, possiamo considerare

$$H = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \dots & t_{1n} & 0 \\ 0 & -t_{11} & \dots & 0 & -t_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{n1} & 0 & \dots & t_{nn} & 0 \\ 0 & -t_{n1} & \dots & 0 & -t_{nn} \end{pmatrix}$$

e riscrivere la condizione nella forma

$$\begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \dots t_{1n} & 0 \\ 0 & -t_{11} & \dots & 0 & -t_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{n1} & 0 & \dots t_{nn} & 0 \\ 0 & -t_{n1} & \dots & 0 & -t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} & \dots & a_{1n} & b_{1n} \\ c_{11} & d_{11} & \dots & c_{1n} & d_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_{n1} & \dots & a_{nn} & b_{nn} \\ c_{n1} & d_{n1} & \dots & c_{nn} & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \dots t_{1n} & 0 \\ 0 & -t_{11} & \dots & 0 & -t_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{n1} & 0 & \dots t_{nn} & 0 \\ 0 & -t_{n1} & \dots & 0 & -t_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} tr(XJH) \begin{pmatrix} 0 & -t_{11} & \dots & 0 & -t_{1n} \\ -t_{11} & 0 & \dots & -t_{1n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -t_{n1} & \dots & 0 & -t_{nn} \\ -t_{n1} & 0 & \dots & -t_{nn} & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} tr(XH) \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \dots t_{1n} & 0 \\ 0 & -t_{11} & \dots & 0 & -t_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{n1} & 0 & \dots t_{nn} & 0 \\ 0 & -t_{n1} & \dots & 0 & -t_{nn} \end{pmatrix};$$

questa è verificata $\iff T = 0 \iff H = 0 \iff P, J = 0$, cioè se e solo se $P \in u(n) \cap SO(2n)$. $\diamondsuit$

Lo studio di $W(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ equivale, dunque, allo studio di $u(n) \cap SO(2n)$. Se $A \in u(n) \cap SO(2n)$ allora si ha anche $A \in U(n)$ dunque A è diagonalizzabile cioè esiste $M \in GL(n, \mathbb{C})$ tale che

$$A = M \Delta M^{-1} = M \begin{pmatrix} e^{\sqrt{-1}\vartheta_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\sqrt{-1}\vartheta_n} \end{pmatrix} M^{-1}.$$

Da $A^2 = -I_d$ segue

$$\begin{pmatrix} e^{\sqrt{-1}\vartheta_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\sqrt{-1}\vartheta_n} \end{pmatrix}^2 = -I_d;$$

dunque deve risultare

$$e^{\sqrt{-1}\vartheta_j} = \pm\sqrt{-1} \ \ \forall j = 1, \dots, n$$

per cui la scelta di Δ si restringe a 2^n possibilità.
Indichiamo con $\Delta(n)$ l'insieme di queste 2^n matrici.

OSSERVAZIONE 2.3. Se $A \in u(n) \cap SO(2n)$ allora tutta la $U(n)$-orbita di A è in

$$u(n) \cap SO(2n) \ .$$

PROPOSIZIONE 2.4. *Due matrici $\Delta_1, \Delta_2 \in \Delta(n)$ sono nella stessa $U(n)$-orbita se e solo se hanno lo stesso numero di $\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$.*

Dimostrazione. Siano $\Delta_1, \Delta_2 \in \Delta(n)$ con lo stesso numero di $\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$. Fissando una base su $\mathbb{C}^{n+1}$ possiamo considerare Δ_1, Δ_2 come applicazioni lineari

$$\Delta_j : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \ \ j = 1, 2.$$

Chiaramente le due applicazioni differiscono soltanto per un cambiamento di base, dunque esiste una matrice unitaria M tale che $\Delta_2 = M\Delta_1 M^{-1}$. Viceversa, se Δ_1, Δ_2 non hanno lo stesso numero di $\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$, non possono stare nella stessa $U(n)$-orbita perchè non hanno la stessa traccia. $\diamondsuit$

Classifichiamo le $U(n)$ orbite delle matrici $\Delta \in \Delta(n)$:

Proposizione 2.5. *La $U(n)$-orbita di una matrice $\Delta \in \Delta(n)$ con k segni $\sqrt{-1}$ e $(n-k)$ segni $-\sqrt{-1}$ è, come spazio omogeneo,*

$$G_r(k,n) = \frac{U(n)}{U(k) \times U(n-k)}.$$

Dimostrazione. È sufficiente calcolare il gruppo di isotropia della matrice

$$\begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_d(k) & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_d(n-k) \end{pmatrix}$$

dove $I_d(k)$ e $I_d(n-k)$ sono le matrici identità di ordine k e $(n-k)$. Chiaramente $U(n) \times U(n-k)$ è contenuto nel gruppo di isotropia della matrice fissata ; sia $A \in U(n)$:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

con α matrice $(k \times k)$ e δ matrice $(n-k \times n-k)$. Imponendo

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_d(k) & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_d(n-k) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_d(k) & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_d(n-k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

si ottengono

$$\begin{array}{ll} \sqrt{-1}\alpha & = \sqrt{-1}\alpha \\ -\sqrt{-1}\beta I_d(n-k) & = \sqrt{-1}I_d(k)\beta \\ -\sqrt{-1}\delta & = -\sqrt{-1}\delta \\ \sqrt{-1}\gamma I_d(k) & = -\sqrt{-1}I_d(n-k)\gamma \end{array}$$

da cui seguono immediatamente $\beta = 0, \gamma = 0$ e quindi la tesi. $\diamondsuit$

Ricordiamo che $Z(n) = \{P \in so(2n) \cap SO(2n) \mid P > 0\}$; dunque dobbiamo stabilire quali dei $G_r(k,n)$ sono contenuti in $Z(n)$.

Proposizione 2.6.

$$Z(n) \cap (u(n) \cap SO(2n)) = \bigcup_{2k \le n} \frac{U(n)}{U(2k) \times U(n-2k)}$$

Dimostrazione.

$$i_r \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_d(h) & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_d(n-h) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & & & \\ & & & -1 & 0 & & & & & \\ & & & & & 0 & -1 & & & \\ & & & & & 1 & 0 & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dove, sulla diagonale, compaiono h blocchi $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $(n-h)$ blocchi $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Indichiamo con A^h_{n-h} la matrice sopra descritta. Sia $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ la base di $\mathbb{R}^{2n}$, considerando che

$$\{e_1, A^h_{n-h}e_1, \ldots, e_{2h-1}, A^h_{n-h}e_{2h-1}, e_{2h+2}, A^h_{n-h}e_{2h+2}, \ldots, e_{2n}, A^h_{n-h}e_{2n}\} =$$
$$= \{e_1, -e_2, \ldots, e_{2h-1}, -e_{2h}, e_{2h+2}, -e_{2h+1}, \ldots, e_{2n}, -e_{2n-1}\}$$

è positivamente orientata $\iff$ h è pari, si ottiene che le basi del tipo

$$\{v_1, A^h_{n-h}v_1, \ldots, v_n, A^h_{n-h}v_n\}$$

sono positivamente orientate $\iff$ h è pari.

Quindi $\dfrac{U(n)}{U(h) \times U(n-h)} \subset Z(n) \iff h$ è pari. $\diamondsuit$

Abbiamo così provato che la parte integrabile, $W(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$, del twistor space $Z(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), F.S.)$ interseca ogni fibra in

$$\bigcup_{2k\leq n} \frac{U(n)}{U(2k)\times U(n-2k)};$$

Proposizione 2.7.

$$SU(n+1)\times_\rho \frac{U(n)}{U(2k)\times U(n-2k)} = \frac{SU(n+1)}{S(U(1)\times U(2k)\times U(n-2k))}.$$

Dimostrazizone. Segue dalla definizione dell'applicazione ρ.

Proposizione 2.8.

$$W(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \bigcup_{2k\leq n} \frac{SU(n+1)}{S(U(1)\times U(2k)\times U(n-2k))}.$$

Dimostrazione. Basta osservare che

$$W(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \bigcup_{2k\leq n} SU(n+1)\times_\rho \frac{U(n)}{U(2k)\times U(n-2k)}$$

ed applicare la proposizione precedente.

3. Il luogo integrabile del twistor space in dimensione 4.

Se $dim_{\mathbb{R}} M = 4$, è possibile fornire una descrizione accurata di $W(M)$. Sia $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ una base ortonormale di $\wedge^2_+ T_x M \cong \mathbb{R}^3 \cong \wedge^2_+\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di $W_{+(x)}$.
Indicando per semplicità $W_{+(x)}$ con W_+, abbiamo che la matrice associata a W_+ rispetto alla base fissata è

$$[W_+] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ con } \sum_{i=1}^{3}\lambda_i = 0.$$

È facile verificare che a $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ sono associate 3 strutture quasi complesse $I, J, K \in so(4)$ tali che $I^2 = J^2 = K^2 = -I_d$, $IJ = K$, $JK = I$, $KI = J$.

Osservazione 3.1.

1) $Z(2) = \{P = aI + bJ + cK \mid a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$

2) Sia $P \in Z(2)$, $P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ allora

$$T_P Z(2) = \{xI + yJ + zK \mid xa + yb + zc = 0\} = P^\perp = s_P;$$

3) $N_{\mathcal{J}}(P) = 0 \iff \sigma(P)[W_+, \sigma(P)]\sigma(P) = 0$ su $\wedge^2_+$;

4) per $A \in \wedge^2_+$ $\sigma(P)[W_+, \sigma(P)]\sigma(P)(A) == [P, W_+([P,[P,A]])-$ $[P, W_+([P,A])]] = [P, W_+(-2(A + PAP)) - [P, W_+(PA -$ $AP)]] = 0 \iff [\sigma(P)W_+, \sigma(P) = 0$ su $P^\perp$.

Vediamo come opera $\sigma(P)$ su $\wedge^2_+\mathbb{R}^4 \subset so(4)$:

sia $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \wedge^2_+\mathbb{R}^4$

$$\sigma(P)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P, xI + yJ + zK = aI + bJ + cK, xI + yJ + zK =$$

$$= (ay - bx)I, J + (az - cx)I, K + (bz - cy)J, K =$$
$$= 2(ay - bx)K - 2(az - cx)J + 2(bz - cy)I,$$

dunque $\sigma(P)$ opera su $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ come la matrice

$$\sigma(P) = 2\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Adesso siamo in grado di determinare il luogo degli zeri del tensore di Nijenhuis:

$$N_{\mathcal{J}}(P) = 0 \iff \sigma(P)[W_+, \sigma(P)]\sigma(P) = 0$$

$$\frac{1}{8}\sigma(P)[W_+,\sigma(P)]\sigma(P) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_1 c + \lambda_2 c & \lambda_1 b - \lambda_3 b \\ \lambda_2 c - \lambda_1 c & 0 & -\lambda_2 a + \lambda_3 a \\ -\lambda_3 b + \lambda_1 b & \lambda_3 a - \lambda_2 a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} =$$

ponendo $\lambda_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$:

$$= \begin{pmatrix} -\lambda_{21}c^2 + \lambda_{13}b^2 & \lambda_{32}ab & -\lambda_{32}ac \\ -\lambda_{13}ab & \lambda_{21}c^2 - \lambda_{32}a^2 & \lambda_{13}bc \\ \lambda_{21}ac & -\lambda_{21}bc & -\lambda_{13}b^2 + \lambda_{32}a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\lambda_{32}abc & \lambda_{21}c^3 - \lambda_{13}cb^2 - \lambda_{32}ca^2 & \lambda_{12}bc^2 + \lambda_{13}b^3 - \lambda_{32}ba^2 \\ \lambda_{21}c^3 - \lambda_{32}ca^2 - \lambda_{13}cb^2 & 2\lambda_{13}abc & \lambda_{31}ab^2 - \lambda_{21}ac^2 + \lambda_{32}a^3 \\ \lambda_{12}bc^2 + \lambda_{13}b^3 - \lambda_{32}ba^2 & \lambda_{31}ab^2 - \lambda_{21}ac^2 + \lambda_{32}a^3 & 2\lambda_{21}abc \end{pmatrix}$$

allora $\sigma(P)[W_+,\sigma(P)\sigma(P) = 0$ su $\wedge^2_+\mathbb{R}^4 \iff$ valgono le seguenti relazioni:

1) $(\lambda_3 - \lambda_2)abc = 0\,;$

2) $(\lambda_1 - \lambda_3)abc = 0\,;$

3) $(\lambda_2 - \lambda_1)abc = 0\,;$

4) $\{(\lambda_2 - \lambda_1)c^2 - (\lambda_1 - \lambda_3)b^2 - (\lambda_3 - \lambda_2)a^2\}c = 0\,;$

5) $\{-(\lambda_2 - \lambda_1)c^2 - (\lambda_3 - \lambda_2)a^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)b^2\}b = 0\,;$

6) $\{-(\lambda_1 - \lambda_3)b^2 - (\lambda_2 - \lambda_1)c^2 + (\lambda_3 - \lambda_2)a^2\}a = 0\,;$

7) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\,.$

Dunque se $W_+ \neq 0$

$$1), 2), 3) \Rightarrow abc = 0,$$

di conseguenza abbiamo tre casi :
<u>caso (i)</u>
se $a = 0$ le condizioni di integrabilità si riscrivono :

1) $\{(\lambda_2 - \lambda_1)c^2 - (\lambda_1 - \lambda_3)b^2\}c = 0\,;$

2) $\{-(\lambda_2 - \lambda_1)c^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)b^2\}b = 0\,;$

3) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\,,$

le prime due condizioni insieme a $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ portano alla determinazione di b e c :

$$\begin{cases} b^2 = \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_3} \\ c^2 = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} \end{cases}$$

la terza permette di determinare b e c in funzione di due soli parametri:

$$\begin{cases} b^2 = \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\lambda_2 + \lambda_1} \\ c^2 = \dfrac{2\lambda_1 + \lambda_2}{2\lambda_2 + \lambda_1} \end{cases}$$

con $\quad 0 \le \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\lambda_2 + \lambda_1} \le 1.$

caso *(ii)*

ponendo $b = 0$ e procedendo in modo analogo al caso precedente si ottiene

$$\begin{cases} a^2 = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_3} = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{2\lambda_1 + \lambda_2} \\ c^2 = \dfrac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3} = \dfrac{2\lambda_2 + \lambda_1}{2\lambda_1 + \lambda_2} \end{cases}$$

con $\quad 0 \le \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{2\lambda_1 + \lambda_2} \le 1.$

caso *(iii)*

ponendo $c = 0$ e procedendo in modo analogo al caso precedente si ottiene

$$\begin{cases} a^2 = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_2} = \dfrac{2\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ b^2 = \dfrac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_1} = \dfrac{2\lambda_2 + \lambda_1}{2\lambda_2 - \lambda_1} \end{cases}$$

con $\quad 0 \le \dfrac{2\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \le 1.$

Osservazione 3.2. Le condizioni :

$$0 \le \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\lambda_2 + \lambda_1} \le 1$$

$$0 \leq \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2\lambda_1 + \lambda_2} \leq 1$$

$$0 \leq \frac{2\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \leq 1$$

costituiscono una suddivisione del piano λ_1, λ_2.

Conseguentemente comunque dato $W_+ \neq 0$, $W_+ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

con $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 0$

il luogo integrabile del twistor space interseca ogni fibra in quattro punti, eventualmente coincidenti a coppie.

Osservazione 3.3. Se due dei λ_j coincidono il punto corrispondente nel piano λ_1, λ_2 è sulla frontiera di uno dei settori che costituiscono la suddivisione del piano.

4. Il caso Kähleriano

Sia M una varietà di dimensione 4, K il suo tensore di curvatura e $x \in M$. Vedendo K_x come endomorfismo di $\wedge^2\mathbb{R}^4 \cong so(4)$, posto $\mathcal{J}_x = J$ e ricordando che il tensore di curvatura di una varietà Kähleriana soddisfa la condizione

$$K(\mathcal{J}X, \mathcal{J}Y) = K(X, Y)$$

possiamo osservare che

$$K_x(X \wedge Y) = K_x(JX \wedge JY) = K_x(-J(X \wedge Y)J)$$

per cui se $X \wedge Y \in s_J(2)$ risulta

$$K_x(X \wedge Y) = -K_x(X \wedge Y) = 0,$$

dunque scelta una base per $su_J(2), s_J(2), \mathbb{R}J$ possiamo affermare che la matrice associata a

$$K_x : \mathbb{R}J \oplus s_J(2) \oplus su_J(2) \longrightarrow \mathbb{R}J \oplus s_J(2) \oplus su_J(2)$$

ha la forma

$$[K_x] = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \xi_2 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \xi_3 & 0 & 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

dunque la matrice associata a

$$W_{+(x)} : \mathbb{R}J \oplus s_J(n) \longrightarrow \mathbb{R}J \oplus s_J(n)$$

ha la forma

$$[W_{+(x)}] = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}a & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a \end{pmatrix},$$

siamo cioè nel caso dell'osservazione 3.3 .

Bibliografia

[At-Hi-Si] Atiyah M.F., Hitchin N.J. and Singer I.M., "*Self-duality in four dimensional Riemannian geometry*", Proc. R. Soc. Lond. Ser A 362, 425-461 (1978).

[Br] Bryant R.L., "*Lie groups and twistor spaces*", Duke Math. J. **52**, I 223-261 (1985).

[Bu-Ra] Burstall F.E. and Rawnsley J.H., "*Twistor theory for Riemannian symmetric spaces*", Springer, Lecture notes in Math. 1424.

[dBa] de Bartolomeis P., "*Generalized twistor spaces and application*", Seminari di Geometria Università di Bologna Dip. di Mat., (1985) 23-32.

[dBa-Mi-Na] de Bartolomeis P., Migliorini L. and Nannicini A., "*Propriètès globales de l'espace de twisteurs*", Rend. Mat. Acc. Lincei s. 9 v.1 (1991).

[Ga] GAUDUCHON P., "*Structures de Weyl-Einstein, espaces de twisteurs et varietes de type $S^1 \times S^3$*", preprint, 1993.

[Kob] KOBAK P.Z., "*Explicit 2-Hermitian metrics*", preliminary draft, 1995.

[Ko-No] KOBAYASHI S. and NOMIZU K., "*Foundations of Differential Geometry 2*", Interscience Tracts Pure and Appl. Math., John Wiley and Sons (1969).

[Ne-Ni] II NEWLANDER A. and NIRENBERG L., "*Complex analytic coordinates in almost complex manifold*", Ann. of Math. **65** 391-404 (1957).

[Sa] SALAMON S., "*Harmonic and holomorphic maps*", Geometry seminar "L. Bianchi" II (1984) (Ed. E. Vesentini) Springer, Lecture notes in Math. 1164.

[Si-Th] SINGER I.M. and THORPE J., "*The curvature of 4 dimensional Einstein spaces*", Global analysis, papers in honors of K. Kodaira (Ed. Spencer, D.C.; Iyanaga, S.), 355-365 Princeton University Press.