SULLE IPERSUPERFICI ALGEBRICHE AD HESSIANA INDETERMINATA (*)

by GIOVANNA ILARDI (in Napoli)(**)

SOMMARIO. - *Si prova che non esistono ipersuperfici di $P^n(\mathbb{C})$, a punti 1-parabolici, ad hessiana indeterminata, con varietà singolare non rigata, di dimensione massima $n-2$. In $P^5(\mathbb{C})$ si prova, poi, che non esistono ipersuperfici a punti 1-parabolici ad hessiana indeterminata, con varietà singolare di dimensione massima 3.*

SUMMARY. - *We prove that there are no hypersurfaces of $P^n(\mathbb{C})$, with 1-parabolic points, undetermined hessian and with singular variety not ruled and of maximal dimension. Then we prove that in $P^5(\mathbb{C})$ there are no hypersurfaces with 1-parabolic points, undetermined hessian and with singular variety of maximal dimension 3.*

Sia f un'ipersuperficie proiettiva irriducibile sul campo complesso, definita dall'equazione $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$, dove $f(x_0, \ldots, x_n)$, è un polinomio omogeneo sul campo complesso. Se ogni punto semplice di f è h-parabolico, il polinomio f^h divide il polinomio hessiano $H(f)$ di f. B. Segre ha posto in [6] il problema di determinare le ipersuperfici f a punti h-parabolici tali che $H(f)$ risulti divisibile per f^{h+1}, questione correlata allo studio delle forme di Bertini di una varietà V_d^r, di $P^n(\mathbb{C})$, di assegnato ordine r e assegnata dimensione d.

Il problema, posto da Segre, è stato poi studiato da A. Franchetta nelle note [3] e [4], per $h = 1$, e da C. Ciliberto [1], per h qualunque.

Si studierà in questa nota un'ampia classe di ipersuperfici f a punti 1-parabolici, ad hessiana indeterminata, cioè tali che $H(f) = 0$.

Il lavoro è così articolato:

(*) Pervenuto in Redazione il 7 marzo 1994.

(**) Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R. Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli "Federico II", complesso Monte S. Angelo, edificio T, Via Cintia, 80126 Napoli (Italia).

Dopo un paragrafo di preliminari, dò una nuova dimostrazione di un teorema dovuto ad A. Franchetta, che caratterizza le ipersuperfici di $P^4(\mathbb{C})$, a punti 1-parabolici e ad hessiana indeterminata.

La dimostrazione è in vari punti diversa da quella originale, sì da consentire una successiva generalizzazione.

Nel paragrafo seguente, infatti, dimostro che non esistono ipersuperfici di $P^n(\mathbb{C})$, a punti 1-parabolici, ad hessiana indeterminata, con varietà singolare, non rigata, di dimensione massima $n-2$.

In $P^5(\mathbb{C})$ provo, poi, che non esistono ipersuperfici a punti 1-parabolici, ad hessiana indeterminata, con varietà singolare di dimensione massima 3.

Indebolendo le ipotesi, dimostro poi, nel lavoro "Sulle ipersuperfici algebriche di $P^4(\mathbb{C})$ contenute multiplamente nella propria hessiana", in corso di pubblicazione su *"Le Matematiche"*, di Catania, che in $P^4(\mathbb{C})$ non esistono ipersuperfici a punti 1-parabolici, contenute multiplamente nella propria hessiana e con varietà singolare di dimensione massima 2.

1. Preliminari.

1.1. Sia V_{n-1} un'ipersuperficie di $P^n(\mathbb{C})$, d'equazione $f(x_0, \dots, x_n) = 0$, d'ordine $d \geq 3$. Ci riferiremo sovente a V_{n-1} come all'ipersuperficie f.

Sia P un punto semplice di V_{n-1}, indicheremo con $A(P)$ il luogo delle rette di $P^n(\mathbb{C})$ passanti per P ed aventi con f in P molteplicità d'intersezione maggiore o uguale a tre.

Si possono verificare le seguenti due circostanze:

— $A(P)$ coincide con l'iperpiano tangente a f in P ed in tal caso si dice che P è un punto di *flesso* per f;

— $A(P)$ è un cono quadrico, avente un punto doppio in P, giacente nell'iperpiano tangente a f in P, detto *cono asintotico* a f in P.

Definizione 1. *Un punto semplice P si dice h-parabolico per f, con $1 \leq h < n-1$, se il vertice di $A(P)$ è un sottospazio lineare h-dimensionale dell'iperpiano tangente ad f in P, e $(n-1)$-parabolico se è un flesso.*

Sia f^* la varietà duale di f, contenuta nello spazio duale di $P^n(\mathbb{C})$.
Si ha che: $\dim f^* = n - h - 1$, con $h \in N$ se e solo se f è a punti h-parabolici (cfr.[6]).

Allora V_{n-1} è costituita da un sistema algebrico irriducibile $\Sigma(f)$, di dimensione $n - h - 1$, di h sottospazi di $P^n(\mathbb{C})$ e in ogni punto semplice di V_{n-1} appartenente al generico sottospazio di $\sum(f)$, f ha lo stesso iperpiano tangente.

Le rette di $\Sigma(f)$ si dicono generatrici di V_{n-1}.

Definizione 2. *L'hessiana di f è l'ipersuperficie definita dalla equazione $H(f) = 0$, dove $H(f)$ è il determinante hessiano di f, cioè:*

$$H(f) = \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{ij=0,\dots,n}$$

che si dice polinomio hessiano di f.

Per alcune proprietà dell'hessiana si veda [7].

Definizione 3. *Si dice che un'ipersuperficie f ha l'hessiana indeterminata se e solo se il determinante hessiano è identicamente uguale a zero.*

È noto che se f è a punti h-parabolici, il polinomio f^h divide il polinomio hessiano $H(f)$ di f (cfr. [6]).

B. Segre [6] pone il problema di determinare le ipersuperfici f a punti h-parabolici tali che $H(f)$ risulti divisibile per f^{h+1}. In particolare f verifica tale proprietà se ha hessiana indeterminata.

Il problema è stato trattato da A. Franchetta [3] e [4] limitatamente al caso $h = 1$, e da C. Ciliberto [1] per h qualunque. Anche il presente lavoro verte su questo problema.

Alla mia trattazione occorre premettere alcune proprietà sui *fuochi* di una famiglia di rette.

Definizione 4. *I fuochi di una famiglia di rette Σ sono i nuclei delle proiettività di Chasles degeneri* (cfr. Teorema 4).

Per la teoria generale dei fuochi si veda [2], [9].

1.2. Si consideri un'ipersuperficie rigata V_{n-1} di $P^n(\mathbb{C})$. Nell'intorno del suo punto generico essa ha equazioni parametriche:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}(u_1, \dots, u_{n-2}) + \mu \mathbf{b}(u_1, \dots, u_{n-2}) \ .$$

Sia A la varietà di equazioni parametriche $\mathbf{x} = \mathbf{a}(u_1, \dots, u_{n-2})$ e B quella di equazioni parametriche $\mathbf{x} = \mathbf{b}(u_1, \dots, u_{n-2})$. Le funzioni $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ possono supporsi analitiche in un polidisco. Inoltre supporremo che le rette generatrici di V_{n-1} non siano tangenti a B, ciò che è ovviamente lecito.

Supponiamo V_{n-1} a punti 1-parabolici con iperpiano tangente fisso lungo le rette generatrici.

Teorema 4. *Il luogo dei punti ove l'iperpiano tangente a V_{n-1} è indeterminato coincide con il luogo dei fuochi per qualche sottofamiglia unidimensionale di rette contenute in V_{n-1}.*

Dimostrazione. L'iperpiano tangente nel punto generico di V_{n-1} ha equazione:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{a}_1 + \mu \mathbf{b}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{a}_{n-2} + \mu \mathbf{b}_{n-2} \end{vmatrix} = 0$$

dove con $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ si denotano le derivate parziali rispetto a u_i.

Esso ha dunque, altresì, equazione:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{a}_1 + \mu \mathbf{b}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{a}_{n-2} + \mu \mathbf{b}_{n-2} \end{vmatrix} = 0 \ . \tag{1.1}$$

Poniamo

$$C = \begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{b}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{b}_{n-2} \end{vmatrix}$$

inoltre, per $1 < i_1 < i_2 < \ldots < i_r < n-2$, indichiamo con $C(i_1, \ldots, i_r)$ il determinante che si ottiene da C sostituendo $\mathbf{b}_{i_1}, \ldots, \mathbf{b}_{i_r}$ con $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}$. La (1.1) si scrive allora nella forma:

$$\mu^{n-2} C + \ldots + \mu^{n-2-r} \sum C(i_1, \ldots, i_r) + \ldots + C(1, \ldots, n-2) = 0 \tag{1.2}$$

ove la sommatoria va estesa a tutte le $\begin{pmatrix} n-2 \\ r \end{pmatrix}$ possibili scelte di $i_1, \ldots, i_r$.

Gli iperpiani tangenti in $\mathbf{a}$ ed in $\mathbf{b}$ hanno equazioni:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{a}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{a}_{n-2} \end{vmatrix} = 0 \qquad\qquad \begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{b}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{b}_{n-2} \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Essi coincidono se, e soltanto se,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a}_1 = \alpha^1\mathbf{a} + \beta^1\mathbf{b} + l_1^1\mathbf{b}_1 + \ldots + l_{n-2}^1\mathbf{b}_{n-2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\mathbf{a}_s = \alpha^s\mathbf{a} + \beta^s\mathbf{b} + l_1^s\mathbf{b}_1 + \ldots + l_{n-2}^s\mathbf{b}_{n-2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\mathbf{a}_{n-2} = \alpha^{n-2}\mathbf{a} + \beta^{n-2}\mathbf{b} + l_1^{n-2}\mathbf{b}_1 + \ldots + l_{n-2}^{n-2}\mathbf{b}_{n-2}\ .
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Tenendo conto delle (1.3), la (1.2) diventa:

$$[\mu^{n-2} + \mu^{n-3}I_1 + \ldots + \mu^{n-2-r}I_r + \ldots + I_{n-2}]C = 0 \tag{1.4}$$

ove I_r è la somma dei minori principali d'ordine r della matrice:

$$L = \left\| \begin{matrix} l_1^1 \ldots\ldots\ldots\ldots l_{n-2}^1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_1^i \ldots\ldots\ldots\ldots l_{n-2}^i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_1^{n-2} \ldots\ldots\ldots l_{n-2}^{n-2} \end{matrix} \right\| \ .$$

Indicando infatti con $C'(i_1, \ldots, i_r)$ il risultato della sostituzione in $C(i_1, \ldots, i_r)$ di $\mathbf{a}_{i_r}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}$ con le loro espressioni fornite dalle (1.3), si ha:

$$C'(i_1, \ldots, i_r) = \left| \begin{matrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{b}_1 \\ \ldots \\ \mathbf{b}_{i_1-1} \\ l_{i_1}^{i_1}\mathbf{b}_{i_1} + \ldots + l_{i_r}^{i_1}\mathbf{b}_{i_r} \\ \mathbf{b}_{i_1+1} \\ \ldots \\ \mathbf{b}_{i_r-1} \\ l_{i_1}^{i_r}\mathbf{b}_{i_1} + \ldots + l_{i_r}^{i_r}\mathbf{b}_{i_r} \\ \mathbf{b}_{i_r+1} \\ \ldots \\ \mathbf{b}_{n-2} \end{matrix} \right| \ .$$

Di qui, con ovvi passaggi, si trae:

$$C'(i_1, \dots, i_r) = C \sum \delta^{i'_1 \dots i'_r}_{i_1 \dots i_r} \; l^{i'_1}_{i_1} \dots l^{i'_r}_{i_r}$$

ove la sommatoria va estesa a tutte le permutazioni $i'_1 \dots i'_r$ di $i_1 \dots i_r$ e $\delta^{i'_1 \dots i'_r}_{i_1 \dots i_r}$ è l'indice di Kronecker. Essendo:

$$\begin{vmatrix} l^{i_1}_{i_1} \dots\dots\dots\dots l^{i_1}_{i_r} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ l^{i_r}_{i_1} \dots\dots\dots\dots l^{i_r}_{i_r} \end{vmatrix} = \sum \delta^{i'_1 \dots i'_r}_{i_1 \dots i_r} \; l^{i'_1}_{i_1} \dots l^{i'_r}_{i_r} \; ,$$

si ha dunque

$$C'(i_1, \dots, i_r) = C \begin{vmatrix} l^{i_1}_{i_1} \dots\dots\dots\dots l^{i_1}_{i_r} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ l^{i_r}_{i_1} \dots\dots\dots\dots l^{i_r}_{i_r} \end{vmatrix}$$

e di qui l'asserto.

Dalla (1.4) segue che, se valgono le (1.3), l'iperpiano tangente è fisso e ben definito nei punti $\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$, salvo che per i valori di μ per cui:

$$\mu^{n-2} + \mu^{n-3} I_1 + \dots + \mu^{n-2-r} I_r + \dots + I_{n-2} = 0 \qquad (1.5)$$

in cui è indeterminato.

Sia $\overline{u} = (\overline{u}_1 \dots \overline{u}_{n-2})$ un punto nel dominio dei parametri, $\overline{\mathbf{a}} = \mathbf{a}(\overline{u})$ il punto corrispondente su A, $\overline{\mathbf{b}} = \mathbf{b}(\overline{u})$ il punto corrispondente su B.

Sia $u(t)$ una curva nel dominio dei parametri tale che $u(\overline{t}) = \overline{u}$ e $\mathbf{a}(u(t))$ e $\mathbf{b}(u(t))$ le curve corrispondenti su A e B. Sia $\overline{\mathbf{a}} + \mu\overline{\mathbf{b}}$ il punto variabile sulla retta $\overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}$.

Sia $\alpha(t, \mu)$ il piano determinato dalla retta $\mathbf{a}(u(t))\mathbf{b}(u(t))$ e dal punto $\overline{\mathbf{a}} + \mu\overline{\mathbf{b}}$. Tale piano è anche determinato dai punti

$$\mathbf{a}(u(t)) \, , \quad \mathbf{b}(u(t)) \, , \quad \frac{\overline{\mathbf{a}}(u(t)) - \overline{\mathbf{a}}}{t - \overline{t}} + \mu \frac{\overline{\mathbf{b}}(u(t)) - \overline{\mathbf{b}}}{t - \overline{t}} \; .$$

Il piano $\overline{\alpha}(\mu) = \lim_{t \to \overline{t}} \alpha(\mu, t)$ è determinato dai punti $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\dfrac{d\overline{\mathbf{a}}}{dt} + \mu \dfrac{d\overline{\mathbf{b}}}{dt}$.

Associando al punto $\overline{\mathbf{a}} + \mu \overline{\mathbf{b}}$ il piano $\overline{\alpha}(\mu)$ si ha una proiettività fra la retta $\overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}$ ed il fascio di piani per $\overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}$, appartenente al $P^3(\mathbb{C})$ determinato da $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\frac{d\overline{\mathbf{a}}}{dt}$, $\frac{d\overline{\mathbf{b}}}{dt}$, ossia dalle tangenti alle curve $\mathbf{a}(u(t))$, $\mathbf{b}(u(t))$ in $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$.

Tenendo conto delle (1.3), si ha:

$$\frac{d\overline{\mathbf{a}}}{dt} + \mu \frac{d\overline{\mathbf{b}}}{dt} = \sum_i (\overline{a}_i + \mu \overline{b}_i)\overline{u'}_i = \sum_i (\alpha^i \overline{\mathbf{a}} + \beta^i \overline{\mathbf{b}} + \sum_j l^i_j \overline{b}_j + \mu \overline{b}_i)\overline{u'}_i =$$
$$= \sum_i (\alpha^i \overline{\mathbf{a}} + \beta^i \overline{\mathbf{b}})\overline{u'}_i + \sum_i (\sum_j l^j_i \overline{u'}_j + \mu \overline{u'}_i)\overline{b}_i \ .$$

Il piano $\overline{\alpha}(\mu)$ è anche determinato dai punti $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\sum_i (\sum_j l^j_i \overline{u'}_j + \mu \overline{u'}_i)\overline{\mathbf{b}}_i$. Siccome $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ sono distinti, la retta $\overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}$ interseca lo spazio tangente a B solo in $\overline{\mathbf{b}}$ e questo punto non dipende da $\overline{\mathbf{b}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{b}}_{n-2}$, il piano $\overline{\alpha}(\mu)$ può essere indeterminato solo se

$$\sum_j l^j_i \overline{u'}_j + \mu \overline{u'}_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-2) \ .$$

D'altra parte è noto che un punto della retta $\mathbf{ab}$ è un fuoco se e solo se il piano ad esso associato nella suddetta proiettività è indeterminato. Ciò significa che il punto $\overline{\mathbf{a}} + \mu \overline{\mathbf{b}}$ è un fuoco per una famiglia unidimensionale di rette contenute in V_{n-1}, se e soltanto se $-\mu$ è autovalore di L, cioè soluzione della (1.5). $\diamondsuit$

2.

Enunciamo ora un teorema che caratterizza le ipersuperfici di $P^n(\mathbb{C})$ a punti 1-parabolici, contenute multiplamente nella propria hessiana, e dimostriamo alcune proprietà sui fuochi, fondamentali per il seguito.

TEOREMA 5. (A. Franchetta) [3] *Sia V_{n-1} un'ipersuperficie di $P^n(\mathbb{C})$ a punti 1-parabolici. Condizione necessaria e sufficiente perché V_{n-1} sia componente multipla della propria hessiana è che ogni piano passante per la retta generica r di Σ e non contenuto nell'iperpiano* *tangente a* V_{n-1} *lungo* r, *intersechi* V_{n-1}, *fuori di* r, *in una curva avente con* r *un solo punto in comune.*

COROLLARIO 6. *Se l'ipersuperficie* V_{n-1} *di* $P^n(\mathbb{C})$ *soddisfa alle condizioni del teorema, valgono le seguenti condizioni:*

a) i fuochi del sistema Σ di rette, che cadono sulla retta generica, devono coincidere in un solo punto;

b) ogni retta di Σ incidente la retta generica deve incontrarla nel fuoco appartenente ad essa.

Dimostrazione. Si osservi che un punto P della retta generica r di Σ è multiplo per V_{n-1} se, e soltanto se, la sezione residua di V_{n-1} con un piano per r, non appartenente all'iperpiano tangente, a V_{n-1} lungo r, passa per P. Infatti, se P è multiplo per V_{n-1}, la sezione di V_{n-1} col piano considerato deve avere un punto multiplo in P, e ciò comporta che la sezione residua passa per P. Viceversa, se ciò accade e P fosse semplice, il piano dovrebbe essere tangente a V_{n-1} in P, e ciò è assurdo perché esso per ipotesi non appartiene all'iperpiano tangente in P.

Per dimostrare la b), si osservi che un punto comune ad r e ad un'altra retta r' di Σ è multiplo per V_{n-1}. Quindi, in virtù del Teorema 5, se V_{n-1} è contenuta multiplamente nella propria hessiana, ogni retta di Σ incidente la retta generica deve incontrarla nel fuoco appartenente ad r. $\diamondsuit$

Da quanto si è osservato segue che:

COROLLARIO 7. *La retta generica* r *di* Σ *contiene un solo punto singolare di* V_{n-1}.

OSSERVAZIONE 8. *In* $P^4(\mathbb{C})$ *si possono considerare:*

a) *ipersuperfici a punti 1-parabolici, contenute almeno doppiamente nella propria hessiana;*

b) *ipersuperfici a punti 2-parabolici, contenute almeno triplamente nella propria hessiana.*

Le ipersuperfici del tipo b) sono coni, e dunque hanno hessiana indeterminata [1].

Si enuncerà ora un teorema dovuto ad A. Franchetta, che caratterizza le ipersuperfici di $P^4(\mathbb{C})$ ad hessiana indeterminata, se ne darà poi una dimostrazione, in alcuni punti alternativa a quella originale, sì da consentire una successiva generalizzazione.

Teorema 9. (A. Franchetta) [4] *Le ipersuperfici irriducibili non coni, di $P^4(\mathbb{C})$, aventi l'hessiana indeterminata, contengono un piano π in cui giace una curva razionale di C^p d'ordine $p > 1$ (luogo dei fuochi), tale che un iperpiano per π interseca l'ipersuperficie in π ed in un numero finito di piani, tutti tangenti a C^p in uno stesso punto.*
Viceversa, ogni ipersuperficie siffatta ha l'hessiana indeterminata.

Dimostrazione. Il teorema si prova attraverso vari lemmi e proposizioni di indipendente interesse.

Sia V_3 un'ipersuperficie di $P^4(\mathbb{C})$ e a punti 1-parabolici, contenuta multiplamente nella propria hessiana. Valgono allora le condizioni a) e b) del corollario 6. V_3 è un'ipersuperficie rigata di $P^4(\mathbb{C})$.

Allora localmente le equazioni parametriche della rigata sono:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}(u_1, u_2) + \mu \mathbf{b}(u_1, u_2) \ . \tag{2.1}$$

Sia A la superficie di rappresentazione parametrica $\mathbf{x} = \mathbf{a}(u_1, u_2)$ e B quella di rappresentazione parametrica $\mathbf{x} = \mathbf{b}(u_1, u_2)$.

Si suppongano poi, com'è sempre possibile, le superfici A e B scelte in modo che la retta $\mathbf{ab}$ non risulti tangente a nessuna delle due in $\mathbf{a}$ o $\mathbf{b}$, rispettivamente.

Le funzioni

$$a^i : (u_1, u_2) \in D_1 \times D_2 \to a^i(u_1, u_2) \in \mathbb{C}$$

e le

$$b^i : (u_1, u_2) \in D_1^1 \times D_2^1 \to b^i(u_1, u_2) \in \mathbb{C}$$

$\forall\, i = 0, \ldots, 4$ con D_1, D_2, D_1^1, D_2^1 dischi, siano olomorfe.

Come già visto nel Teorema 4, l'iperpiano tangente, nel punto generico della rigata, ha equazione (1.2) che, nel caso in esame, si riscrive come:

$$\mu^2 \begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Si imponga poi la condizione di sviluppabilità, cioè si imponga che l'iperpiano tangente non vari lungo la generica retta della rigata e quindi, in particolare, che coincidano l'iperpiano tangente nel punto $\mathbf{a}$ e quello nel punto $\mathbf{b}$.

Allora si ha, per la (1.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \alpha^1\mathbf{a} + \beta^1\mathbf{b} + l_1^1\mathbf{b}_1 + l_2^1\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 &= \alpha^2\mathbf{a} + \beta^2\mathbf{b} + l_1^2\mathbf{b}_1 + l_2^2\mathbf{b}_2 \ . \end{aligned} \tag{2.2}$$

Sostituendo nell'espressione precedente si ha:

$$(\mu^2 + (l_2^2 + l_1^1)\mu + l_1^1 l_2^2 - l_1^2 l_2^1) \begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Poiché vale la a), si ha

$$(*) \qquad (l_2^2 + l_1^1)^2 - 4(l_1^1 l_2^2 - l_1^2 l_2^1) = 0 \ .$$

Lemma 10. *Si può supporre* $l_2^1 = 0$.

Dimostrazione. Si consideri una curva α sulla superficie A di rappresentazione parametrica $\mathbf{a} = \mathbf{a}(u_1(t), u_2(t))$ e la curva β corrispondente sulla superficie B di rappresentazione parametrica $\mathbf{b} = \mathbf{b}(u_1(t), u_2(t))$.

Per $t = \overline{t}$, sia $\overline{u}_1 = u_1(\overline{t}), \overline{u}_2 = u_2(\overline{t}), \overline{\mathbf{a}} = \mathbf{a}(u_1(\overline{t}), u_2(\overline{t}))$ e $\overline{\mathbf{b}} = \mathbf{b}(u_1(\overline{t}), u_2(\overline{t}))$.

Sia t_α la tangente a α in $\overline{\mathbf{a}}$ congiungente $\overline{\mathbf{a}}$ con il punto $\overline{\mathbf{a}}\overline{u'}_1 + \overline{\mathbf{a}}\overline{u'}_2$, dove $\overline{u'}_1$, $\overline{u'}_2$ sono le coordinate proiettive omogenee nel fascio τ delle rette del piano μ tangente ad A in $\mathbf{a}$ e t_β la tangente a β in $\mathbf{b}$ congiungente $\overline{\mathbf{b}}$ con $\overline{\mathbf{b}}_1\overline{u'}_1 + \overline{\mathbf{b}}_2\overline{u'}_2$, dove $\overline{u'}_1$, $\overline{u'}_2$ sono le coordinate proiettive omogenee nel fascio τ' delle rette del piano $\overline{\mu}$ tangente a B in $\overline{\mathbf{b}}$.

Si ha che t_α e t_β si corrispondono in una proiettività tra τ e τ' in quanto hanno le stesse coordinate proiettive. I piani $\overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}t_\alpha$,

$\overline{\mathbf{ab}}t_\beta$ si corrispondono in una proiettività π tra i fasci di rette $\overline{\mathbf{ab}}$ appartenenti ai $P^3(\mathbb{C})$ di $\overline{\mathbf{ab}}\mu$, $\overline{\mathbf{ab}}\overline{\mu}$ che nel nostro caso coincidono.

Pertanto π è una proiettività di un fascio di piani in sé, e possiede almeno un piano unito. Ne segue che si può considerare in ogni punto di B una retta t_β che sia incidente alla corrispondente t_α. Esiste ovviamente un sistema $[\beta]$ di curve che hanno come tangenti le dette t_β.

Assumendo queste curve come $u_2 =$ cost. si ha $l_2^1 = 0$. $\diamondsuit$

La $(*)$ prende ora la forma:

$$(l_2^2 + l_1^1)^2 - 4l_1^1 l_2^2 = (l_2^2 - l_1^1)^2 = 0$$

dunque, ponendo

$$l_2^2 = l_1^1 = \theta \ , \qquad l_1^2 = \sigma$$

le condizioni di sviluppabilità diventano del tipo:

$$\mathbf{a}_1 = \alpha^1\mathbf{a} + \beta^1\mathbf{b} + \theta\mathbf{b}_1 \qquad \mathbf{a}_2 = \alpha^2\mathbf{a} + \beta^2\mathbf{b} + \sigma\mathbf{b}_1 + \theta\mathbf{b}_2 \ . \tag{2.3}$$

Allora si ha:

$$\mu^2 - 2\theta\mu + \theta^2 = 0$$

cioè

$$\mu = -\theta \ .$$

Quindi la varietà dei fuochi W_δ è rappresentata parametricamente dalle equazioni:

$$\mathbf{x} = \mathbf{c}(u_1, u_2) - \theta\mathbf{b} + \mathbf{a} \ .$$

Si ha:

LEMMA 11. *Condizione necessaria e sufficiente perché la dimensione δ di W sia 0 e quindi V_3 sia un cono è che si abbia:*

$$\sigma = 0 \ .$$

Dimostrazione. Sia $\sigma = 0$. Derivando la prima delle (2.3) rispetto ad u_2 e la seconda rispetto ad u_1, si ha:

$$\mathbf{a}_{12} = (\alpha_2^1 + \alpha^1\alpha^2)\mathbf{a} + (\beta_2^1 + \alpha^1\beta^2)\mathbf{b} + \theta_2\mathbf{b}_1 + (\alpha^1\theta + \beta^1)\mathbf{b}_2 + \theta\mathbf{b}_{12}$$

$$\mathbf{a}_{21} = (\alpha_1^2 + \alpha^1\alpha^2)\mathbf{a} + (\beta_1^2 + \alpha^2\beta^1)\mathbf{b} + (\beta^2 + \alpha^2\theta)\mathbf{b}_1 + \theta_1\mathbf{b}_2 + \theta\mathbf{b}_{12}$$

ed eguagliando

$$(\alpha_2^1 - \alpha_1^2)\mathbf{a} + (\beta_2^1 - \beta_1^2 + \alpha^1\beta^2 - \alpha^2\beta^1)\mathbf{b} +$$

$$+(\theta_2 - \beta^2 - \alpha^2\theta)\mathbf{b}_1 + (-\theta^1 + \beta^1 + \alpha^1\theta)\mathbf{b}_2 = 0 \ .$$

Siccome i punti $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ sono indipendenti (in quanto possiamo assumere che $\mathbf{a}$ non appartenga al piano tangente a B in $\mathbf{b}$ determinato da $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$), si ha

$$\theta_1 - \alpha^1\theta - \beta^1 = 0 \qquad \theta_2 - \alpha^2\theta - \beta^2 = 0 \tag{2.5}$$

per cui

$$\mathbf{c}_1 = \alpha^1\mathbf{c} \ , \qquad \mathbf{c}_2 = \alpha^2\mathbf{c}$$

e quindi il punto $\mathbf{c}$ è fisso. Infatti

$$\mathbf{c}_1 = -\theta_1\mathbf{b} - \theta b_1 + \mathbf{a}_1 = -\theta_1\mathbf{b} - \theta\mathbf{b}_1 + \alpha^1\mathbf{a} + \beta^1\mathbf{b} + \theta\mathbf{b}_1$$

e allora per la prima delle (2.5) si ha $\mathbf{c}_1 = \alpha^1\mathbf{c}$. Analogamente per $\mathbf{c}_2$. Viceversa, se $\delta = 0$, si ha che esiste l tale che $\mathbf{c}_2 = l\mathbf{c}$, e quindi

$$(\alpha^2 - l)\mathbf{a} + (l\theta - \theta_2 + \beta^2)\mathbf{b} + \sigma\mathbf{b}_1 = 0$$

e siccome $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}_1$, sono indipendenti si ha:

$$\alpha^2 - l = 0 \ , \qquad \theta - \theta_2 + \beta^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad \underline{\sigma = 0} \ . \qquad \diamondsuit$$

LEMMA 12. *Condizione necessaria e sufficiente perché δ sia 1 è che si abbia:*

$$\sigma \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \theta_1 - \alpha^1\theta - \beta^1 = 0 \ .$$

Dimostrazione. Se $\theta_1 - \alpha^1\theta - \beta^1 = 0$ e $\sigma \neq 0$, si ha $\delta = 1$. Infatti se $\sigma \neq 0$ si ha $\delta > 0$.
Da $\theta_1 - \alpha^1\theta - \beta^1 = 0$ si ha $\mathbf{c}_1 = \alpha^1\mathbf{c}$ e $\mathbf{c}$ dipende solo da u_2.
Viceversa sia $\delta = 1$. Si ha $\sigma \neq 0$, poiché se fosse $\sigma = 0$ si avrebbe $\delta = 0$. Per le (2.3) si ha:

$$\mathbf{c}_1 = (-\theta_1 + \beta^1)\mathbf{b} + \alpha^1\mathbf{a} \qquad \mathbf{c}_2 = (-\theta_2 + \beta^2)\mathbf{b} + \alpha^2\mathbf{a} + \sigma\mathbf{b}_1 \ .$$

Nel piano di $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}_1$, e nel riferimento determinato da questi vettori, $\mathbf{c}$ ha coordinate $(-\theta, 1, 0)$; $\mathbf{c}_1$ ha coordinate $(-\theta_1+\beta^1, \alpha^1, 0)$; $\mathbf{c}_2$ ha coordinate $(-\theta_2+\beta^2, \alpha^2, \sigma)$. Poiché $\delta = 1$; $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ devono essere dipendenti, quindi deve aversi:

$$\begin{vmatrix} -\theta & 1 & 0 \\ -\theta_1+\beta^1 & \alpha^1 & 0 \\ -\theta_2+\beta^2 & \alpha^2 & \sigma \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Ne segue

$$\sigma(-\alpha^1\theta + \theta_1 - \beta^1) = 0 \ .$$

ed essendo $\sigma \neq 0$, si ha:

$$\theta_1 - \alpha^1\theta - \beta^1 = 0 \ . \qquad \diamondsuit$$

Riassumendo, condizione necessaria e sufficiente perché $\delta = 2$ è che si abbia:

$$\sigma \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \theta_1 - \alpha^1\theta - \beta^1 \neq 0 \ .$$

Si consideri ora il caso in cui la varietà W dei fuochi della rigata è una curva.
Allora si ha:

$$\mathbf{c}_1 = \alpha^1\mathbf{c} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{c}_2 = \alpha^2\mathbf{a} + (\beta^2 - \theta_2)\mathbf{b} + \sigma\mathbf{b}_1 \ . \tag{1.6}$$

Lemma 13. *Una componente della famiglia delle rette della rigata per un punto* $\mathbf{c}$ *di* W *è costituita da rette che intersecano* B *lungo la linea coordinata* $u_2 =$ *cost.*

Dimostrazione. Basta osservare che per la prima delle (2.6), per $u_2 =$ cost. $\mathbf{c}$ è fisso. $\diamondsuit$

Lemma 14. *Le curve di* B *date da* $u_2 =$ *cost. sono piane.*

Dimostrazione. Uguagliando le espressioni di $\mathbf{a}_{12}$ e $\mathbf{a}_{21}$, si ha una relazione lineare omogenea tra $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_{11}$:

$$(\alpha^1_2 - \alpha^2_1)\mathbf{a} + (\beta^1_2 - \beta^2_1 + \alpha^1\beta^2 - \alpha^2\beta^1)$$

$$\mathbf{b} + (\theta_2 - \beta^2 - \sigma_1 + \alpha^1\sigma - \alpha^2\theta)\mathbf{b}_1 - \sigma\mathbf{b}_{11} = 0\ .$$

Derivando l'espressione precedente rispetto a u_1 e per la prima delle (2.3) si ha una relazione lineare omogenea tra $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_{11}$, $\mathbf{b}_{111}$:

$$\begin{aligned}&(\alpha^1_{21} - \alpha^2_{11} + \alpha^1_2\alpha^1 - \alpha^2_1\alpha^1)\mathbf{a} + (\beta^1_{21} - \beta^2_{11} + \alpha^1_1\beta^2 + \alpha^1\beta^2_1 - \\ &-\alpha^2_1\beta^1 - \alpha^2\beta^1_1 + \alpha^1_2\beta^2 - \alpha^2_1\beta_1)\mathbf{b} + (\beta^1_2 - 2\beta^2_1 + \alpha^1\beta^2 - \alpha^2\beta^1 + \\ &+\theta_{21} - \sigma_{11} + \alpha^1_1\sigma + \alpha^1\sigma_1 - \alpha^2_1\theta + \alpha^2\theta_1)\mathbf{b}_1 + \\ &+(\theta_2 - \beta^2 - 2\sigma_1 + \alpha^1\sigma - \alpha^2\theta)\mathbf{b}_{11} - \sigma\mathbf{b}_{111} = 0\ .\end{aligned}$$

Eliminando $\mathbf{a}$ tra le due relazioni suddette si ottiene una relazione lineare omogenea tra $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_{11}$, $\mathbf{b}_{111}$, in cui il coefficiente di $\mathbf{b}_{111}$ è $\sigma \neq 0$. Quindi $\mathbf{b}_{111}$ dipende linearmente da $\mathbf{b}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{11}$, e di conseguenza il P^3-osculatore è indeterminato in ogni punto. $\diamondsuit$

Data la genericità della varietà direttrice B, ne segue che il cono delle rette per $\mathbf{c}$ è un piano, e precisamente il piano individuato dai punti $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}_1$, in quanto la retta $\mathbf{ab}$ passa per $\mathbf{c}$ e la retta $\mathbf{bb}_1$ è tangente alla curva piana $u_2 =$ cost.
Tale piano, per la seconda delle (2.6) è tangente a W in $\mathbf{c}$. In definitiva V_3 è luogo di infiniti piani tangenti a W.

LEMMA 15. *Il luogo dei fuochi è una curva piana.*

Dimostrazione. Si consideri un punto generico $\mathbf{c}'$ di W ed un intorno C di $\mathbf{c}'$ su W, abbastanza piccolo, sì che su di esso valgono le considerazioni che seguono. Si indichi con $\mathbf{c}$ il punto variabile di C, con $\pi_1, \ldots, \pi_s$ i piani di V_3 tangenti alla curva W in $\mathbf{c}$, con $\pi'_1, \ldots, \pi'_s$ le determinazioni di $\pi_1, \ldots, \pi_s$, relative al punto $\mathbf{c}'$.

Se per un dato $i = 1, \ldots, s$ i piani π_i si intersecassero a due a due, al variare di $\mathbf{c}$, in una retta, allora il piano generico varierebbe in un sistema di piani a due a due incidenti in una retta e quindi o V_3 sarebbe contenuto in un $P^3(\not{C})$, o sarebbe un cono di vertice una retta. Allora il punto $\mathbf{d}_l$ $(l = 1, \ldots, s)$ comune a π'_l e π_l, che non è fisso perché l'ipersuperficie non è un cono di vertice un punto, descrive, al variare di $\mathbf{c}$, un ramo analitico di curva δ'_l.

Si ha che il ramo δ'_l appartiene ad una retta per $\mathbf{c}'$. Infatti, se ciò non fosse vero, la retta variabile del piano π'_l, passante per $\mathbf{c}'$ e prossima alla tangente in $\mathbf{c}'$ a δ'_l, incontrerebbe δ'_l in un punto almeno, $\mathbf{d}'_l$, distinto da $\mathbf{c}'$, ma per $\mathbf{d}'_l$ passerebbe il piano π'_l, relativo ad un punto $\mathbf{c}$ dell'intorno C. Quindi la retta della rigata $\mathbf{c}'\mathbf{d}'_l$ sarebbe incidente alla retta $\mathbf{c}\mathbf{d}'_l$ nel punto $\mathbf{d}'_l$ e non nel fuoco, come deve essere per la b) del Corollario 6. Allora su ogni piano π_l esiste una retta r_l per il punto di contatto $\mathbf{c}$, sulla quale cade il punto d'intersezione di π_l con il piano variabile, avente lo stesso indice.

Si fissino due punti generici $\mathbf{c}'$ e $\mathbf{c}''$ di C e si indichino con π'_l, π''_l, r'_l e r''_l le relative determinazioni di π_l e di r_l; le rette r'_l e r''_l sono, per quanto detto, incidenti nel punto comune a π'_l e π''_l. Allora le rette r_l, essendo a due a due incidenti, e non passando per uno stesso punto, giacché V_3, per ipotesi, non è un cono, appartengono ad uno stesso piano π, contenente C. Poiché la curva focale è irriducibile, si ha che è piana. $\diamondsuit$

Lemma 16. *Sia S un generico iperpiano contenente π, allora la sezione di V_3 con S è costituita da un insieme finito di piani tangenti a W in uno stesso punto.*

Dimostrazione. Sia S il generico iperpiano per π, la sezione dell'ipersuperficie con S è costituita dal piano π, contato con una certa molteplicità e da un certo insieme di piani $\pi^1, \ldots, \pi^k$.
Infatti se si considera un punto di $S \cap V_3$, non contenuto in π, si ha che per esso passano un numero finito di piani di V_3, tangenti a W. Quindi tali piani sono contenuti in S.

Proviamo che i piani $\pi^1, \ldots, \pi^k$ passano per una stessa tangente di W. Si supponga infatti che due di essi, π^h e π^l siano tangenti a W in punti distinti, $\mathbf{c}^h$ e $\mathbf{c}^l$ e quindi che s'incontrino in una retta s, non appartenente a π.
Allora il punto $\mathbf{c}$ in cui s incontra π sarà distinto da uno almeno dei punti $\mathbf{c}^h$ e $\mathbf{c}^l$. Sia ad esempio $\mathbf{c} \neq \mathbf{c}^h$, la generica retta della V_3 appartenente a π^h incontra allora s in un punto $\mathbf{d}$, per il quale passa la retta $\mathbf{c}^h\mathbf{d}$ anch'essa appartenente alla rigata, e questo contraddice la b) del corollario 6. $\diamondsuit$

Lemma 17. *La curva dei fuochi è razionale.*

Dimostrazione. Basta osservare che un iperpiano per π determina un punto sulla curva dei fuochi. Quindi si ha un'applicazione razionale dominante tra il fascio di iperpiani per π e la curva dei fuochi. Allora W è unirazionale e dunque razionale. $\diamondsuit$

Si proverà ora:

LEMMA 18. *Una ipersuperficie che soddisfa le condizioni a), b) del corollario 6, e tale che la varietà dei fuochi del sistema Σ sia una curva algebrica W, ha l'hessiana indeterminata.*

Dimostrazione. Si consideri un punto generico P di $P^4(\mathbb{C})$, si indichi con S' l'iperpiano congiungente π e P, con Φ la sezione di S' con l'ipersuperficie costituita, come si è visto, da un gruppo di piani passanti per una stessa retta r' di π. La superficie prima polare in S' del punto variabile Q di r', rispetto a Φ, è indeterminata, quindi l'ipersuperficie prima polare di Q rispetto a V_3, che indicheremo con Ω, contiene S'. Notiamo che Ω non può essere indeterminata, altrimenti V_3 è un cono.

Se S' è componente semplice di Ω, l'ipersuperficie $\Omega' = \Omega - S'$ varia in un fascio, al variare del punto su r', non potendo accadere che l'ipersuperficie Ω', al variare del punto su r', sia fissa.

Difatti, se S'' fosse un altro iperpiano per π e r'' la retta per cui passano i piani sezione di V_3 con S'', l'ipersuperficie prima polare del punto comune a r' e r'' conterrebbe sia S' che S''. Al variare di S'' la ipersuperficie prima polare di un punto di r' conterrebbe tutto lo spazio, e quindi sarebbe indeterminata. Ma allora l'ipersuperficie prima polare sarebbe indeterminata in ogni punto di π e quindi V_3 sarebbe un cono di vertice π.

Esisterà allora un punto Q di r' tale che la relativa Ω' passi per P, e quindi tale che la relativa ipersuperficie polare $\Omega = \Omega' + S'$, abbia un punto doppio in P. Dunque P appartiene all'hessiana di V_3.

Se poi S' fosse componente multipla di Ω, la ipersuperficie polare di un qualunque punto di r' avrebbe un punto singolare in P. Si conclude che in ogni caso il punto generico P di $P^4(\mathbb{C})$ appartiene alla hessiana di f, che dunque è indeterminata. $\diamondsuit$

3. Dimostrerò ora il

TEOREMA 19. *Un'ipersuperficie V_{n-1} a punti 1-parabolici, contenuta multiplamente nella propria hessiana e con varietà dei fuochi non rigata, di dimensione massima $n-2$, non può avere l'hessiana indeterminata.*

Notiamo che applicando questo teorema al caso $n = 4$, e tenendo conto di alcune osservazioni successive, si completa la dimostrazione del teorema 9.

Per la dimostrazione occorrono vari lemmi e proposizioni di indipendente interesse.
Si ricordi:

DEFINIZIONE 20. *Le linee asintotiche di una varietà di dimensione m di P^n sono curve lungo le quali lo spazio tangente alla varietà ed il P^m-osculatore alla curva coincidono.*

LEMMA 21. *Un'ipersuperficie V_{n-1} di P^n a punti 1-parabolici contenuta multiplamente nella propria hessiana e tale che la varietà W dei fuochi, del relativo sistema Σ di rette che descrivono V_{n-1} abbia dimensione $n-2$, è il luogo delle tangenti ad un sistema di linee asintotiche di W.*

Dimostrazione. V_{n-1} è un'ipersuperficie rigata.
Sia $\mathbf{x} = \mathbf{a}\ (u_1, \ldots, u_{n-2}) + \mu\mathbf{b}\ (u_1, \ldots, u_{n-2})$ la sua equazione parametrica. Si supponga che la varietà dei fuochi W sia quella di equazione $\mathbf{x} = \mathbf{a}\ (u_1, \ldots, u_{n-2})$. Affinché gli $n-2$ fuochi coincidano nel punto $\mathbf{a}$ sulla generica retta deve aversi $I_l = 0$ per $l = 1, \ldots, n-2$ (cfr. § 1.2).

Da $I_{n-2} = 0$ segue che si può trovare una combinazione lineare delle (1.3), da cui scompaiono $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-2}$. Ne segue che $\mathbf{ab}$ appartiene al P^{n-2} determinato da $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}$, tangente alla varietà dei fuochi in $\mathbf{a}$.
Si possono considerare allora le curve di W che hanno come tangente in ogni punto la retta $\mathbf{ab}$ e si possono assumere queste curve come linee u_1 $(u_2 = u_3 = \ldots = u_{n-2} = \text{cost.})$.

Con ciò la retta $\mathbf{ab}$ coincide con la tangente alla linea u_1 nel punto, ossia con $\mathbf{aa}_1$ e la prima relazione delle (1.3) diventa:

$$\mathbf{a}_1 = \alpha^1 \mathbf{a} + \beta^1 \mathbf{b} \ .$$

La matrice L ha ora la prima riga con tutti zeri, e quindi da $I_{n-3} = 0$ segue che il minore principale relativo agli indici $2, \ldots, n-2$ è uguale a zero.

Si possono combinare linearmente le ultime $n-3$ relazioni delle (1.3), in modo da eliminare $\mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-2}$. Si ottiene così una relazione del tipo:

$$r^2 \mathbf{a}_2 + \ldots + r^{n-2} \mathbf{a}_{n-2} = A\mathbf{a} + B\mathbf{b} + C\mathbf{b}_1 \ .$$

Ciò significa che la tangente $\mathbf{bb}_1$ alla linea $u_2 = u_3 = \ldots = u_{n-2} =$ cost. della superficie B è incidente al P^{n-3} determinato da $\mathbf{a}, \mathbf{a}_2, \ldots$, $\mathbf{a}_{n-2}$, tangente ad A in $\mathbf{a}$. Resta allora determinata la retta che congiunge il punto di incidenza con $\mathbf{a}$. Si assumano le linee u_2 in modo che abbiano come tangente in ogni punto la retta suddetta. Allora si ha:

$$\mathbf{a}_2 = \alpha^2 \mathbf{a} + \beta^2 \mathbf{b} + l_1^2 \mathbf{b}_1 \ .$$

Così procedendo, per ogni $m < n-2$ segue che si possono combinare linearmente le ultime $n-2-m$ relazioni in modo da eliminare $\mathbf{b}_m, \mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_{n-2}$, così da ottenere una relazione

$$r^m \mathbf{a}_m + \ldots + r^{n-2} \mathbf{a}_{n-2} = A\mathbf{a} + B\mathbf{b} + C_1 \mathbf{b}_1 + \ldots + C_m \mathbf{b}_m \ .$$

Il sottospazio P^m determinato da $\mathbf{b}, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ è incidente al P^{n-2-m} determinato da $\mathbf{a}, \mathbf{a}_m, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}$ in un punto. Si osservi infatti che $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ sono indipendenti, poiché parte del sistema $\{\mathbf{b}, \mathbf{b}_1,$ $\ldots, \mathbf{b}_{n-1}\}$ che genera lo spazio tangente a B, che ha dimensione $n-1$. Lo stesso vale per $\{\mathbf{a}, \mathbf{a}_m, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}\}$.

Assumendo le linee u_m tangenti alle rette congiungenti $\mathbf{a}$ al punto suddetto, si ha:

$$\mathbf{a}_m = \alpha^m \mathbf{a} + \beta^m \mathbf{b} + l_1^m \mathbf{b}_1 + \ldots + l_m^m \mathbf{b}_m \ .$$

Segue che la retta $\mathbf{ab}$, generatrice di V_{n-1}, è la tangente $\mathbf{aa}_1$ alla curva u_1 in $\mathbf{a}$.

Le (1.3) semplificate diventano:

$$
(1.3') \qquad
\begin{gathered}
\mathbf{a}_1 = \alpha^1\mathbf{a} + \beta^1\mathbf{b} \\
\mathbf{a}_2 = \alpha^2\mathbf{a} + \beta^2\mathbf{b} + l_1^2\mathbf{b}_1 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathbf{a}_i = \alpha^i\mathbf{a} + \beta^i\mathbf{b} + l_1^i\mathbf{b}_1 + \ldots + l_{i-1}^i\mathbf{b}_{i-1} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathbf{a}_{n-2} = \alpha^{n-2}\mathbf{a} + \beta^{n-2}\mathbf{b} + l_1^{n-2}\mathbf{b}_1 + l_2^{n-2}\mathbf{b}_2 + \ldots + l_{n-3}^{n-2}\mathbf{b}_{n-3} \ .
\end{gathered}
$$

Da esse segue per induzione che per $\nu < n-3$, $\mathbf{b}_\nu$ dipende linearmente da

$$
\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{\nu+1} \ . \tag{3.1}
$$

Dimostriamo che $\dfrac{d^s\mathbf{a}}{du_1^s}$ dipende linearmente da $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \ldots$, $\mathbf{a}_s$, per ogni $s \leq n-2$.

La proposizione è vera per $s = 2$. Infatti dalla prima delle (1.3′) si ha che $\mathbf{a}_{11}$ dipende linearmente da $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1$ e, d'altra parte, dalla prima delle (1.3′) si ha che $\mathbf{b}$ dipende linearmente da $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1$ e dalla seconda che $\mathbf{b}_1$ dipende da $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}_2$ e quindi anche da $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$.

Si procede per induzione. Supposto che $\dfrac{d^s\mathbf{a}}{du_1^s}$ dipenda linearmente da $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s$, si ha che $\dfrac{d^{s+1}\mathbf{a}}{du_1^{s+1}}$ dipende linearmente da $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \ldots$, $\mathbf{a}_s, \mathbf{a}_{11}, \ldots, \mathbf{a}_{1s}$.

Dalla prima delle (1.3′) segue che $\mathbf{a}_{1l}$ dipende da $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_l, \mathbf{b}_l$.

Dalla (3.1) si ha che $\mathbf{b}_l$ dipende linearmente da $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{l+1}$. Allora $\mathbf{a}_{1l}$ dipende da $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{l+1}$ e anche da $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{l+1}$. Pertanto $\dfrac{d^{s+1}\mathbf{a}}{du_1^{s+1}}$ dipende da $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_1$, $\ldots$, $\mathbf{a}_{s+1}$.

Allora nei punti della curva $u_2 = u_3 = \ldots = u_{n-2} =$ cost. il P^{n-2}-osculatore alla curva e lo spazio tangente a W coincidono. Quindi tali curve sono un sistema di linee asintotiche e V_{n-1} è il luogo delle tangenti a tali linee. $\diamondsuit$

LEMMA 22. *Se V_{n-1} è a punti 1-parabolici e ad hessiana indeterminata, il sistema lineare Σ delle ipersuperfici prime polari è composto con una congruenza $\mathcal{C}$ di rette, cioè tutte le ipersuperfici prime polari che passano per un punto generico P, passano per la retta p di $\mathcal{C}$, passante per P.*

Dimostrazione. Anteponiamo la seguente osservazione: se la matrice hessiana $H(x)$, ha rango $n+1-h$ $(h>0)$, nel punto $\mathbf{x}$ generico dello spazio, nel punto generico $\mathbf{x}$ di V_{n-1} ha rango $n+1-k$, con $k \geq h$ e $\mathbf{x}$ è k-parabolico. Nell'ipotesi che V_{n-1} sia a punti 1-parabolici, si ha dunque che $h=1$. Sia f l'equazione di V_{n-1}. Quanto precede comporta che le fibre dell'applicazione razionale:

$$\gamma : \mathbf{x} \in P^n \to \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \in P^n \ ,$$

hanno dimensione uno, e quindi l'immagine, X, ha dimensione $n-1$. Questa applicazione, ristretta a V_{n-1}, non è altro che la mappa di Gauss. Se si indica con f_i la derivata di f rispetto a x_i, ciò vuol dire che tra le f_i c'è una relazione algebrica $\pi(f_0, \ldots, f_n) = 0$. Dunque il sistema Σ è composto con una congruenza di curve, fibre di γ, poiché la matrice jacobiana di Σ non è altro che $H(x)$ ed ha rango n ([7], pg. 222). Proviamo che Σ è composto con una congruenza di rette. A tal fine adopereremo un'osservazione dovuta a Gordan e Noether [5]:
detta π_i la derivata di π rispetto ad f_i, si ha:

$$f_j(\ldots x_i + \mu\pi_i(f_l(\mathbf{x}))\ldots) = f_j(\ldots x_i \ldots) \tag{3.2}$$

cioè f_j è indipendente da μ.
Infatti

$$\frac{\partial}{\partial\mu} f_j(\ldots x_i + \mu\pi_i \ldots) = \sum_0^n {}_i \, \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\pi_i = \sum_0^n {}_i \, \frac{\partial \pi}{\partial f_i}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

$$= \sum_0^n {}_i \, \frac{\partial \pi}{\partial f_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\pi(f_i) = 0$$

poiché $\quad \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}.$

Se le $\pi_i(f_l(\mathbf{x}))$ non sono tutte nulle, si può considerare il punto $\mathbf{\Pi}_x$ che ha come coordinate $\pi_i(f_l(\mathbf{x}))$. Se $\mathbf{\Pi}_x \neq \mathbf{x}$ resta determinata la retta p_x per i due punti e si ha che le ipersuperfici prime polari per $\mathbf{x}$ contengono tutta la retta p_x.

D'altra parte le $\pi_i(f_l(\mathbf{x}))$ non possono essere tutte nulle. Infatti se $\pi(f_l)$ è la relazione algebrica di grado minimo che sussiste fra le f_l, i punti in cui $\pi_i(f_l) = 0 \ \ (i = 0, \ldots, n)$ sono i punti singolari dell'ipersuperficie $\pi(f_l) = 0$ e quindi formano una sottovarietà propria di tale ipersuperficie, di dimensione minore di $n - 1$.
La X avrebbe dunque dimensione minore di $n - 1$ e sarebbe $h > 1$, contraddizione.
Se poi fosse identicamente $\pi_i(f_l) = \theta x_i$, con $\theta \neq 0$, per la relazione di Eulero si avrebbe $\sum_0^n \pi_i(f_l) f_i = \nu\pi(f_l) = 0$, con ν ordine di π.
Ma si avrebbe anche $\sum_0^n {}_i \ \pi_i(f_l) f_i = \theta \sum_0^n {}_i \ x_i f_i = \theta\, m f = 0$, con m ordine di V_{n-1} e quindi $f = 0$, contraddizione.
Quindi il punto di coordinate $(\pi_0(f_l), \ldots, \pi_n(f_l))$ è distinto dal punto $(x_0, \ldots, x_n)$. $\diamondsuit$

Dunque le ipersuperfici prime polari sono composte con una congruenza di rette Σ', precisamente quella descritta dalle rette p_x congiungenti $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_1)$ con il punto $\pi(x) = (\pi_0(f_l), \ldots, \pi_n(f_l))$.

Proposizione 23. *Se una retta p_x ha in comune con V_{n-1} un punto semplice, essa appartiene a V_{n-1}, ed è una generatrice di V_{n-1}.*

Dimostrazione. Sia Q il punto comune semplice per V_{n-1}. L'iperpiano polare di Q che è tangente a V_{n-1}, è il luogo dei punti tali che l'ipersuperficie polare relativa passa per Q e quindi per p_x. In particolare l'ipersuperficie prima polare di Q passa per p_x e l'iperpiano tangente ad essa in Q, che coincide con l'iperpiano tangente a V_{n-1}, contiene la retta p_x. Ne segue che l'ipersuperficie polare di un punto R di p_x passa per p_x, e quindi per R, onde R appartiene a V_{n-1} e quindi la retta p_x appartiene a V_{n-1}. L'iperpiano tangente a V_{n-1} lungo la p_x è fisso perché p_x è una componente di una fibra dell'applicazione γ, e quindi p_x è una generatrice di V_{n-1}. $\diamondsuit$

Corollario 24. *Una retta p_x che non appartenga a V_{n-1} in-*

contra V_{n-1} *solo in punti singolari.*

LEMMA 25. *Il punto* $\mathbf{\Pi}_x$*, se è determinato, è singolare per* V_{n-1}.

Dimostrazione. Applichiamo la formula di Taylor al primo membro della (3.2), assumendo come punto iniziale $\mu\pi_i(f_l(\mathbf{x}))$ e come indeterminante le x_i. Si ha allora

$$\begin{aligned}
&f_j(\ldots x_i+\mu\pi_i f_l(\mathbf{x})\ldots)=f_j(\ldots\mu\pi_i(f_l(\mathbf{x}))\ldots)\\
&\qquad+\Sigma f_{jh}(\ldots\mu\pi_i f_l(\mathbf{x})\ldots)x_i+\ldots=\\
&\mu^{m-1}f(\ldots\pi_i(f_l(\mathbf{x}))\ldots)+\mu^{m-2}\Sigma f_{jh}(\ldots\pi_i(f_l(\mathbf{x}))\ldots)x_i+\ldots
\end{aligned}$$

Siccome per la (3.2) $f_j(\ldots x_i+\mu\pi_i f_l(\mathbf{x})\ldots)$ non dipende da μ, si ha identicamente $f_j(\ldots\pi_i(f_l(\mathbf{x}))\ldots)=0\ \ \forall j$, e ciò vuol dire che $\mathbf{\Pi}_x$ è singolare per V_{n-1}. ◊

Infine si ha la seguente proposizione che consente di completare la dimostrazione del teorema 19:

PROPOSIZIONE 26. *Una retta* p_x *che non appartenga a* V_{n-1} *incontra* V_{n-1} *in un solo punto singolare.*

Dimostrazione. Per $\mathbf{x}$ generico sulla retta p_x c'è un $f_j(\mathbf{x})\neq 0$.

Per (3.2) si ha allora $f_j(\mathbf{x}+\mu\pi_i(f_l(\mathbf{x})))=f_j(\mathbf{x})\neq 0$ per ogni μ, quindi ogni punto A di p_x diverso da $\mathbf{\Pi}_x$ è semplice per V_{n-1} se appartiene a V_{n-1}.
Quindi la retta generica p_x interseca V_{n-1} in un unico punto con molteplicità m. Ciò accade allora anche per ogni retta particolare del sistema Σ' che non sia contenuta in V_{n-1}. ◊

CONCLUSIONE 27. *Si fissi un punto generico* A *su* W*. Tutte le rette* p_x *di* Σ' *intersecano* W*. Ne segue che per* A *passano* ∞^1 *rette* p_x*, che formano un cono di vertice* A.

Si può considerare allora il cono delle rette p_x per A. In tale cono la tangente asintotica per A appartiene a V_{n-1}, mentre le altre rette non intersecano ulteriormente W, poiché W non è rigata.

Si fissi una varietà algebrica δ su W di dimensione $n-3$ che non passi per A.

L'insieme delle rette p_x che si appoggiano a δ costituisce una ipersuperficie algebrica T, che non passa per A. Poiché possiamo supporre che T possa muoversi in un sistema algebrico, per ogni punto della tangente asintotica generica passano altre generatrici, contraddizione (§ 2, corollario 6, b)). $\diamondsuit$

OSSERVAZIONE 28. *Per $n = 4$, si completa la dimostrazione del teorema 9. Infatti in $P^4(\mathbb{C})$ la varietà dei fuochi è una superficie. Se W fosse rigata, avrebbe due sistemi di linee asintotiche, e dovrebbe quindi soddisfare due equazioni di Laplace. Ma, com'è noto (cfr. [8], pg.97), ciò è possibile soltanto se W appartiene a un P^3 o è sviluppabile, circostanze che certamente non si verificano nel nostro caso, in quanto il luogo delle tangenti alle linee asintotiche di W è una V_3 appartenente a P^4.* $\diamondsuit$

Si proverà ora:

4. TEOREMA 29. *Un'ipersuperficie V_4 di $P^5(\mathbb{C})$, a punti 1-parabolici, con varietà singolare di dimensione massima, non può avere l'hessiana indeterminata.*
Il teorema si dimostrerà attraverso due lemmi.

LEMMA 30. *La varietà dei fuochi non può essere doppiamente rigata.*

Dimostrazione. Procediamo per assurdo. Supponiamo che la varietà W dei fuochi, rappresentata parametricamente al modo solito da $\mathbf{x} = \mathbf{a}(u_1, u_2, u_3)$, sia doppiamente rigata. Per il punto generico A di W passano allora due rette. Con un'opportuna scelta del riferimento tali rette siano le linee coordinate $du_1 = du_3 = 0$, $du_2 = du_3 = 0$.

Le linee asintotiche siano le linee coordinate $du_2 = du_3 = 0$. Allora si ha

$$\mathbf{a}_{22} = \mathbf{a} + h_2\mathbf{a}_2 \ , \quad \mathbf{a}_{33} = \mathbf{a} + h_3\mathbf{a}_3 \ . \tag{4.1}$$

D'altra parte:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{11} &= \mathbf{a} + l^1\mathbf{a}_1 + l^2\mathbf{a}_2 + l^3\mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_{111} &= \mathbf{a} + m^1\mathbf{a}_1 + m^2\mathbf{a}_2 + m^3\mathbf{a}_3 \ .\end{aligned} \tag{4.2}$$

Derivando la prima delle (4.2) ed eguagliandola con la seconda, tenendo conto dell'espressione di $\mathbf{a}_{11}$, si ottiene che $\mathbf{a}_{13}$ appartiene al sottospazio D di dimensione quattro, generato da $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_{12}$. Mostreremo che tutte le derivate successive di $\mathbf{a}$ dipendono da tali vettori. Innanzi tutto, tutte le derivate seconde appartengono a D.

Infatti, per le espressioni già scritte, vi appartengono $\mathbf{a}_{11}$, $\mathbf{a}_{12}$, $\mathbf{a}_{13}$, $\mathbf{a}_{22}$, $\mathbf{a}_{33}$.

Derivando la prima delle (4.2) rispetto a u_2 e ad u_3, e sostituendo tali espressioni in $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{13}\rangle_1$ si ha:

$$\mathbf{a}_{23} \in \langle \mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_{12}\rangle \ .$$

Tenendo conto delle espressioni precedenti si ha poi facilmente che tutte le derivate terze appartengono a D.
Quindi $W \subseteq P = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_{12}\rangle$, contraddizione.

Se poi le rette per il punto A e la tangente alla linea asintotica per A sono complanari, mostreremo che W è contenuto in un sottospazio di dimensione tre.

Scegliamo il riferimento in modo che le rette abbiano equazioni $du_2 = du_3 = 0$, $du_1 = du_3 = 0$, e $\mathbf{c} = \mathbf{a}(u(t))$ sia la linea asintotica.

Poiché la tangente alla linea asintotica è complanare alle due rette per A, si ha

$$\mathbf{c}' \in \langle \mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\rangle \ .$$

Si ottiene così una relazione lineare tra $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, e poiché tali vettori sono indipendenti si trova che la linea asintotica appartiene al piano $u_3 = \text{cost}$.

Ciò porta subito a contraddire il corollario 6, b) del § 2. Infatti V_{n-1} sarebbe rigata in piani descritti dalle rette tangenti alle asintotiche piane. La retta generica di V_{n-1} interseca dunque ogni altra retta complanare in un punto non focale. ♢

LEMMA 31. *La varietà dei fuochi non può essere semplicemente rigata.*

Dimostrazione. Procediamo per assurdo.
Supponiamo che W sia semplicemente rigata. Sia T la famiglia delle rette di W. Supponiamo si possa scegliere un sistema t di ∞^1 rette di T, tale che la generica retta di T non incontri nessuna delle rette di t, ossia non incontri la superficie δ, descritta dalle rette di t (se ciò accade possiamo concludere come nella conclusione 27). Si supponga che non sia possibile e vediamo come deve esser fatta W.

Poiché tutte le rette di T devono incontrare δ, allora ognuna delle rette di t deve incontrare ∞^1 rette di T. Sia l una delle rette di t. Se il punto d'incontro di l con le rette di T varia, per l'arbitrarietà di t, per il punto generico di W passa più di una retta, in contraddizione col lemma 30. Allora il punto d'intersezione è fisso, ossia su δ deve esserci una curva, C, tale che per ogni suo punto passano ∞^1 rette di T, $\forall t$. Scegliamo ora come δ uno dei coni di vertice un punto di C. Se tale cono contiene C, allora tutte le rette di T sono corde di C e quindi W è la varietà delle secanti di C. Se il cono non contiene C, allora si trova una nuova curva C', avente rispetto a T le stesse proprietà di C. È allora ovvio che W è la varietà delle rette che congiungono punti di C e C', o, come si dice, è il *join* di C e C'. Supponiamo accada questo secondo fatto. Se accade il primo si procede infatti in modo analogo.

Sia A un punto sulla curva C e B un punto su C'. Le curve C e C' abbiano rappresentazioni parametriche $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ e $\mathbf{b} = \mathbf{b}(v)$. Lungo la retta AB il P^3-tangente è fisso, ed è generato da $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}(v)$, $d\mathbf{a}/dt$, $d\mathbf{b}/dv$.

LEMMA 32. *Sia $A'B'$ la retta variabile di W; allora, se $A'B'$ tende ad AB, la retta intersezione dei P^3-tangenti lungo AB e $A'B'$ tende alla retta AB.*

Dimostrazione. Scegliamo una famiglia ∞^1 analitica di rette, contenente AB. Essa può supporsi costituita dalle rette che uniscono i punti $\mathbf{a}(t)$ e $\mathbf{b}(t)$.

Supponiamo che la retta AB si ottenga in corrispondenza di $t = 0$. Ci restringiamo all'affine e scegliamo il riferimento in modo che la retta AB coincida con l'asse x^1 ed in particolare A sia $\mathbf{a}(0) = \mathbf{0}$ e B sia $\mathbf{b}(0) = (1, 0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{a}'(0) = 4(0, 1, 0, 0, 0)$ e $\mathbf{b}'(0) = (0, 0, 1, 0, 0)$. Di conseguenza il P^3-tangente lungo la retta AB avrà equazione $x^4 = x^5 = 0$.

Si avrà dunque:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(0) + \mathbf{a}'(0)t + \mathbf{a}''(0)\tfrac{t^2}{2} + \dots$$

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}(0) + \mathbf{b}'(0)t + \mathbf{b}''(0)\tfrac{t^2}{2} + \dots$$

Consideriamo ora i piani generati da $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b} \rangle$ e $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{a} \rangle$.
Il primo piano ha la seguente rappresentazione cartesiana: $\mathbf{x} = h\mathbf{a} + k\mathbf{a}' + l\mathbf{b}$, cioè

$$\begin{aligned}
x^1 &= h\left(a_1''(0)\frac{t^2}{2} + \dots\right) + k(a_1''(0)t + \dots) + l\left(1 + b_1''(0)\frac{t^2}{2} + \dots\right) \\
x^2 &= h\left(t + a_2''(0)\frac{t^2}{2} + \dots\right) + k(1 + a_2''(0)t + \dots) \\
&\qquad + \quad l\left(b_2''(0)\frac{t^2}{2} + \dots\right) \\
x^3 &= h\left(a_3''(0)\frac{t^2}{2} + \dots\right) + k(a_3''(0)t \dots) + l\left(t + b_3''(0)\frac{t^2}{2} + \dots\right) \\
x^4 &= h\left(a_4''(0)\frac{t^2}{2} + \dots\right) + k(a_4''(0)t \dots) + l\left(b_4''(0)\frac{t^2}{2} + \dots\right) \\
x^5 &= h\left(a_5''(0)\frac{t^2}{2} + \dots\right) + k(a_5''(0)t \dots) + l\left(b_5''(0)\frac{t^2}{2} + \dots\right) \ .
\end{aligned}$$

Intersecando tale piano con il P^3-tangente di equazione $x^4 = x^5 = 0$, si ha

$$\begin{aligned}
h &= At^3 \\
k &= Bt^4 \\
l &= Ct^3
\end{aligned}$$

(con A, B, C coefficienti diversi da zero). Quindi

$$h = 1 \ , \qquad k = \beta t \ , \qquad l = \gamma \ .$$

Per $t \to 0$, si ottiene il punto B sulla retta AB. Analogamente per l'altro piano, e quindi l'asserto. $\diamondsuit$

LEMMA 33. *Sia* Γ *una curva in* $P^5(\mathbb{C})$, P *un punto fissato di* Γ *e* P' *un punto variabile. Allora la retta intersezione dei* P^3*-osculatori alla curva in* P' *e* P *tende alla tangente* $P'P$ *quando* $P' \to P$.

Dimostrazione. La curva Γ abbia rappresentazione parametrica $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$. Ci restringiamo all'affine per fare la verifica e scegliamo il riferimento in modo che $P = \mathbf{c}(0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{c}'(0) = (1,0,0,0,0)$, $\mathbf{c}''(0) = (0,1,0,0,0)$, $\mathbf{c}'''(0) = (0,0,1,0,0)$.
Quindi il P^3-osculatore in P a Γ ha equazione $x^4 = x^5 = 0$. Consideriamo il P^3-osculatore a Γ nel punto variabile, P'. Esso ha la seguente rappresentazione cartesiana:

$$\mathbf{x} = h\mathbf{c} + k\mathbf{c}' + l\mathbf{c}'' + m\mathbf{c}'''$$

dove:

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}(t) &= \mathbf{c}(0) + \mathbf{c}'(0)t + \mathbf{c}''(0)\frac{t^2}{2!} + \mathbf{c}'''(0)\frac{t^3}{3!} + \mathbf{c}''''(0)\frac{t^4}{4!} + \ldots \\
\mathbf{c}'(t) &= \mathbf{c}'(0) + \mathbf{c}''(0)t + \mathbf{c}'''(0)\frac{t^2}{2} + \mathbf{c}''''(0)\frac{t^3}{6} + \ldots \\
\mathbf{c}''(t) &= \mathbf{c}''(0) + \mathbf{c}'''(0)t + \mathbf{c}''''(0)\frac{t^2}{2} + \ldots \\
\mathbf{c}'''(t) &= \mathbf{c}'''(0) + \mathbf{c}''''(0)t \ldots
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
x^1 &= h\left(t + c_1''''(0)\frac{t^4}{4!} + \ldots\right) + k\left(1 + c_1''''(0)\frac{t^3}{6} + \ldots\right) \\
&\qquad + l\left(c_1''''(0)\frac{t^2}{2} + \ldots\right) + m(c_1''''(0)t + \ldots) \\
x^2 &= h\left(\frac{t^2}{2} + c_2''''(0)\frac{t^4}{4!} + \ldots\right) + k\left(t + c_2''''\frac{t^3}{6} + \ldots\right) \\
&\qquad + l\left(1 + c_2''''(0)\frac{t^2}{2} + \ldots\right) + m(c_2''''(0)t + \ldots) \\
x^3 &= h\left(\frac{t^3}{3!} + c_3''''(0)\frac{t^4}{4!} + \ldots\right) + k\left(\frac{t^2}{2} + c_3''''(0)\frac{t^3}{6} + \ldots\right) \\
&\qquad + l\left(t + c_3''''(0)\frac{t^2}{2} + \ldots\right) + m(1 + c_3''''(0)t + \ldots) \\
x^4 &= h\left(c_4''''(0)\frac{t^4}{4!} + \ldots\right) + k\left(c_4''''(0)\frac{t^3}{6} + \ldots\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ l\left(c_4^{''''}(0)\frac{t^2}{2}+\ldots\right) + m(c_4^{''''}(0)t+\ldots)\\
x^5 = h\left(c_5^{''''}(0)\frac{t^4}{4!}+\ldots\right) &+ k\left(c_5^{''''}(0)\frac{t^3}{6}+\ldots\right)\\
&+ l\left(c_5^{''''}(0)\frac{t^2}{2}+\ldots\right) + m(c_5^{''''}(0)t+\ldots)\ .
\end{aligned}$$

Intersecando tale P^3 con il P^3-osculatore nell'origine, di equazione $x^4 = x^5 = 0$, si ottiene:

$$\begin{gathered}
h\left(c_4^{''''}(0)\frac{t^4}{4!}+\ldots\right) + k\left(c_4^{''''}(0)\frac{t^3}{6}+\ldots\right) + l\left(c_4^{''''}(0)\frac{t^2}{2}+\ldots\right)\\
+m(c_4^{''''}(0)t+\ldots) = 0\\
h\left(c_5^{''''}(0)\frac{t^4}{4!}+\ldots\right) + k\left(c_5^{''''}(0)\frac{t^3}{6}+\ldots\right) + l\left(c_5^{''''}(0)\frac{t^2}{2}+\ldots\right)\\
+m(c_5^{''''}(0)t+\ldots) = 0\ .
\end{gathered}$$

Per $m = 0$ si ottiene quindi

$$\begin{aligned}
h &= At^5\\
k &= Bt^6\\
l &= Ct^7
\end{aligned}$$

(con A, B, e C coefficienti diversi da zero). Quindi si ottiene $h = \alpha t$, $k = \beta t^2$, $l = \gamma t^3$, $m = 0$.

Scegliendo $l = 0$, si ha: $h = \alpha' t$, $k = \beta' t^2$, $l = 0$, $m = \gamma' t^4$. In corrispondenza dei valori di h, k, l, m si ottengono due punti distinti di intersezione dei due P^3-osculatori che determinano la retta intersezione.

Per $t \to 0$ si ottengono i punti $\mathbf{0}$ e $(1,0,0,0,0)$ che appartengono alla tangente $P'P$, e quindi l'asserto. $\diamondsuit$

Conclusione 34. Sia d una linea asintotica su W, e D il punto in comune con la retta AB e D' il punto variabile, in comune con $A'B'$. Il P^3-osculatore nel punto D' alla curva d, coincide con il P^3-tangente a W lungo $A'B'$, poiché d è asintotica. Se $D' \to D$, la retta intersezione dei due P^3-tangenti tende alla retta AB, per il lemma 32, e alla tangente alla curva d, per il lemma 33. Quindi la tangente asintotica è tangente alla retta AB. Poiché questo vale in ogni punto, la linea asintotica è una retta, contraddizione. $\diamondsuit$

Bibliografia

[1] Ciliberto C., *Ipersuperficie algebriche a punti parabolici e relative hessiane*, Rend. Accad. Naz. delle Scienze detta dei XL - Memorie di Matematica, (IV) fasc. 3 (1979), 25-42.

[2] Ciliberto C. and Sernesi E., *Singularities of the theta divisor and congruences of planes*, J. Algebraic Geometry, **1** (1992), 231-250.

[3] Franchetta A., *Forme algebriche sviluppabili e relative hessiane*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., **10** (1951), 1-4.

[4] Franchetta A., *Sulle forme algebriche di S^4 aventi l'hessiana indeterminata*, Rend. Mat., (5) **13** (1954), 1-6.

[5] Gordan P. and Noether M., *Über die algebraischen Formen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindent*, Mathem. Annalen, **X** (1876), 547-568.

[6] Segre B., *Bertini forms and hessian matrices*, J. London Math. Soc., **26** (1951), 164-176.

[7] Segre B., *Prodromi di Geometria Algebrica*, Cremonese, Roma (1972).

[8] Segre C., *Su una classe di superficie degl'iperspazii legata colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine*, Opere, vol. II, 20-49 (1906-07), Roma 1958.

[9] Segre C., *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazio*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **30** (1910), 87-121.