SULLA NON σ-ASSOCIATIVITÀ DELLE MEDIE ASSOCIATIVE (*)

di E. BARONE e V.B. MOSCATELLI (a Lecce) (**)

SOMMARIO. - *Si dimostra la veridicità della congettura di B. Girotto e S. Holzer sull'esistenza di medie associative che non sono σ-associative. Si aggiungono poi alcune osservazioni relative.*

SUMMARY. - *We prove that the conjecture of B. Girotto and S. Holzer, on the existence of associative means that are not σ-associative, is true. We also add some related remarks.*

In [1] gli Autori danno le definizioni di medie associative e σ-associative per masse e mentre osservano che le medie σ-associative sono anche associative, congetturano soltanto che possano esistere medie associative che non sono σ-associative.

In questa nota si prova che la congettura è vera.

Inoltre il controesempio utilizzato nella prova è di per sè interessante, in quanto chiarisce meglio la portata del cosiddetto "piccolo teorema di Fubini" (cfr. [2] p. 324), sulla derivazione termine a termine di una serie di funzioni monotone.

Per comodità del lettore, richiamiamo le definizioni introdotte in [1].

Una *media* m è un funzionale su un insieme di masse, verificante la proprietà di consistenza:

$$m(k_x) = x$$

essendo k_x la massa a due valori $0 - k$, concentrata in x.

(*) Pervenuto in Redazione l'8 ottobre 1990.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R. e del gruppo nazionale di Analisi Reale e Teoria della Misura del M.U.R.S.T. (40%).

(**) Indirizzo degli Autori: Dipartimento di Matematica – Università degli Studi di Lecce – Via Arnesano – 73100 Lecce (Italy).

Una media si dice *associativa* se

$$m(a\mu_1 + b\mu_2) = m(a\mu'_1 + b\mu'_2) \quad con \quad a, b \geq 0 \tag{1}$$

quando $m(\mu_i) = m(\mu'_i)$ e la norma della massa μ_i è uguale a quella della massa μ'_i $(i = 1, 2)$.

Una media si dice *σ-associativa* quando la (1) vale per una infinità numerabile di masse μ_i e quindi alla somma si sostituisce la serie nella (1).

Incominciamo col provare il seguente lemma.

LEMMA 1. *Data una successione* $(f_n)_n$ *di funzioni monotone derivabili in tutto* $[a, b]$ *ed ivi uniformemente convergente verso* f, *può benissimo accadere che sia* f *derivabile su tutto* $[a, b]$ *ma in qualche punto* x^* *di* $[a, b]$, $f'_n(x^*)$ *non converga verso* $f'(x^*)$.

Dim. Consideriamo la successione

$$f_n(x) = x\sqrt{x}/(\sqrt{x} + 1/n) \tag{2}$$

e la funzione

$$f(x) = x$$

per x in [0,1].

Si vede facilmente che $(f_n)_n$ converge uniformemente verso f, che le f_n sono monotone crescenti e derivabili in tutto [0,1], come del resto anche f, ma mentre $f'_n(0) = 0$, risulta $f'(0) = 1$. c.v.d.

Dal risultato precedente, posto $g_n = f_n - f_{n-1}$ si trae un risultato analogo per le serie di funzioni monotone. Precisamente:

PROPOSIZIONE 2. *Data una serie di funzioni monotone (crescenti) e non negative* g_n *derivabili su tutto [a,b] ed uniformemente convergente verso* f, *può essere* f *derivabile su tutto [a,b], mentre in qualche punto* x^* *di [a,b], la serie delle* $g'_n(x^*)$ *non converge verso* $f'(x^*)$.

Il risultato precedente diviene interessante se confrontato con il seguente:

PICCOLO TEOREMA DI FUBINI. *Se la serie di funzioni monotone (crescenti) f_n converge verso f in $[a,b]$, allora la serie delle derivate f'_n converge quasi ovunque verso f' in $[a,b]$.*

Venendo ora al problema iniziale, sia $\{F\}$ il σ-campo di Borel su $[0,1]$ e λ la misura di Lebesgue su $[0,1]$. Sia M l'insieme di tutte le misure μ aventi derivata $d\mu/d\lambda$ nel punto 0 di $[0,1]$. Consideriamo la seguente media associativa su M

$$m(\mu) = \left(\int_0^1 x\mu(dx) + d\mu/d\lambda(0)\right)/||\mu||, \tag{3}$$

introdotta in [1], osservazione 4.18, p. 150.

In particolare se f è una funzione assolutamente continua, crescente in $[0,1]$ e derivabile in 0, allora

$$\mu(F) = \int_F f'(x)dx \tag{4}$$

è una misura appartenente ad M e risulta inoltre

$$m(\mu) = \left(\int_0^1 xf'(x)dx + f'(0)\right)/(f(1) - f(0)) . \tag{5}$$

Consideriamo le f_n definite dalla (2) e sia

$$g_1 = f_1,\ g_n = f_n - f_{n-1} \quad (n = 2, 3, \ldots) \tag{6}$$

per modo che risulti

$$f_n = g_1 + g_2 + \ldots + g_n \tag{7}$$

per ogni n.

Tenendo presente che le g_n sono funzioni regolari e crescenti in $[0,1]$, sia μ_n la misura associata a g_n mediante la (4). Supponiamo ora di aver determinato delle funzioni k_n regolari e crescenti in $[0,1]$ in modo tale che, detta μ'_n la misura associata a k_n mediante la (4), siano verificate le seguenti properietà:

$$||\mu'_n|| = ||\mu_n|| \tag{8}$$

$$m(\mu'_n) = m(\mu_n) \tag{9}$$

cioè

$$k_n(1) - k_n(0) = g_n(1) = 1/(n(n+1)) \tag{10}$$

$$\int_0^1 x k_n'(x)\,dx + k_n'(0) = \int_0^1 x g_n'(x)\,dx + g_n'(0) \ . \tag{11}$$

Posto $h_n = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$, risulterà anche, equivalentemente,

$$h_n(1) - h_n(0) = f_n(1) = n/(n+1) \tag{12}$$

$$\int_0^1 x h_n'(x)\,dx + h_n'(0) = \int_0^1 x f_n'(x)\,dx + f_n'(0) \ . \tag{13}$$

Nell'ipotesi che le h_n e le h_n' convergano rispettivamente ad h ed h' in $[0,1]$ e sia possibile il passaggio al limite sotto il segno di integrale, posto

$$\mu = \sum_{n\geq 1} \mu_n \ , \quad \mu' = \sum_{n\geq 1} \mu_n' \ ,$$

riesce (per il piccolo teorema di Fubini e per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue)

$$\mu(F) = \int_F f'(x)\,dx \ ,$$

$$\mu'(F) = \int_F h'(x)\,dx \ ,$$

da cui, supposto $h_n'(0) = 0$ per ogni n, risulta, passando al limite nella (13),

$$m(\mu) = 3/(2\|\mu\|), \ m(\mu') = 1/(2\|\mu\|) \ .$$

Osservato che per la σ-associatività dovrebbe essere $m(\mu) = m(\mu')$, concluderemo che la media m non è σ-associativa e che la congettura che esistano medie associative che non siano σ-associative è vera. È pertanto sufficiente provare l'esistenza delle predette funzioni h_n. A tal fine, equivalentemente, verifichiamo l'esistenza di funzioni p_n $(= h_n')$ regolari su $[0,1]$, con le seguenti properietà:

$$0 < p_n(x) \leq p_{n+1}(x) \quad \text{per ogni } x \text{ tra } 0 \text{ e } 1 \ , \tag{14}$$

$$p_n(0) = 0 \tag{15}$$

$$\int_0^1 p_n(x)\,dx = n/(n+1) \tag{16}$$

$$\int_0^1 x p_n(x) = 1/2 - z_n\,, \tag{17}$$

ove (vedi la (13))

$$z_n = 2(\log(n+1))/n^4 + 1/(n+1) - 2/(3n) + 1/n^2 - 2/n^3\,,$$

$$\lim_n p_n(x) = p(x) \text{ uniformemente in } [0,1]\,. \tag{18}$$

LEMMA 3. *Se* $0 < c < 1$, *esiste una funzione* q *positiva di classe* C^∞ *a supporto compatto in* [0,1] *(in breve* q *in* $C^\#$*) tale che*

$$\int_0^1 q(x)\,dx = 1 \text{ e } \int_0^1 x q(x)\,dx = c\,. \tag{19}$$

Dim. Dato $\varepsilon > 0$ tale che $[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \subset [0,1]$, basta definire

$$q(x) = \begin{cases} k\exp(-(\varepsilon^2 - (c-x)^2)^{-1}) & \text{se x è in } [c-\varepsilon, c+\varepsilon] \\ 0 & \text{altrove}\,, \end{cases} \tag{20}$$

essendo k positivo tale che

$$k\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp((x^2 - \varepsilon^2)^{-1})\,dx = 1\,. \tag{21}$$

c.v.d.

LEMMA 4. *Sia* $0 < b < a$. *Esiste allora una funzione* q *in* $C^\#$ *tale che*

$$\int_0^1 q(x)\,dx = a \text{ e } \int_0^1 x q(x)\,dx = b\,. \tag{22}$$

Dim. Poichè $b/a < 1$, dal lemma precedente segue che esiste una funzione t in $C^\#$ che verifica le (19) con $c = b/a$. Allora la funzione $q := at$ verifica le (22).

PROPOSIZIONE 5. *Sia* $0 < r < 1$ *e siano* $(d_n)_n$, $(e_n)_n$ *successioni strettamente positive, verificanti le seguenti condizioni:*

$$d_n \searrow 0 \ , \ e_n \searrow 0 \ , \tag{23}$$

$$d_n \leq 1 - r, \ e_n < r \tag{24}$$

$$e_n - e_{n+1} < d_n - d_{n+1} \ . \tag{25}$$

Allora esistono funzioni p_n *in* $C^\#$ *verificanti le seguenti proprietà:*

$$0 \leq p_n(x) \leq p_{n+1}(x) \quad per \ x \ in [0,1] \tag{26}$$

$$\int_0^1 p_n(x)dx = 1 - d_n \ , \tag{27}$$

$$\int_0^1 xp_n(x)dx = r - e_n \ . \tag{28}$$

Dim. Dal lemma 4 con $a = 1 - d_1$ e $b = r - e_1$, segue che esiste p_1 in $C^\#$ soddisfacente le (27) e (28) con $n = 1$. Per induzione, se abbiamo costruite le funzioni p_k in $C^\#$ ($k \leq n$) soddisfacenti le (26)–(28), sempre per il lemma (4), con $a = d_n - d_{n+1}$ e $b = e_n - e_{n+1}$, possiamo trovare una funzione q_{n+1} in $C^\#$ tale che

$$\int_0^1 q_{n+1}(x)dx = d_n - d_{n+1} \ \text{e} \ \int_0^1 xq_{n+1}(x)dx = e_n - e_{n+1} \ .$$

Allora la funzione $p_{n+1} = p_n + q_{n+1}$ è in $C^\#$ e soddisfa le (26)–(28) per $n+1$. c.v.d.

PROPOSIZIONE 6. *Esistono funzioni* p_n *verificanti le proprietà* (14)-(18).

Dim. Basta applicare la proposizione precedente con $r = 1/2$,

$$d_n = 1/(n+1), \ e_n = z_n$$

ed osservare che in questo caso, poichè $c_n = (e_n - e_{n+1})/(d_n - d_{n+1})$ tende ad 1/3, si può prendere il supp(q_n) di ampiezza costante (ε costante). Ne segue che $\max q_n(x) = k\exp(-1/\varepsilon^2)$ con k tale che $k\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\exp(1/(x^2-\varepsilon^2))dx = d_n - d_{n+1} = 1/((n+1)(n+2))$ e quindi $\max q_n(x) = C/((n+1)(n+2))$.

Pertanto, tenuto conto della

$$p_{n+m}(x) - p_n(x) = q_{n+1}(x) + q_{n+2}(x) + \ldots + q_{n+m}(x)$$

ed essendo la serie $\sum_{n\geq 1} 1/((n+1)(n+2))$ convergente, risulta uniformemente convergente la successione $(p_n)_n$. c.v.d.

A volte può essere utile la seguente osservazione suggerita dalla media precedente.

DEFINIZIONE. Una media si dice σ-lineare su M', se per ogni a_n non negativo e μ_n in M', risulta

$$m\left(\sum_{n\geq 1} a_n\mu_n\right) = \sum_{n\geq 1} a_n m(\mu_n) ,$$

ogni qualvolta $\sum_n a_n\mu_n$ si trova in M'.

Risulta immediatamente:

PROPOSIZIONE 7. *Se m è σ-lineare, allora m è σ-associativa.*

PROPOSIZIONE 8. *Se m è lineare e continua, allora m è σ-lineare.*

OSSERVAZIONE 1. I risultati precedenti sono legati al risultato, provato in [1]:

se m è associativa e continua su M^+, allora m è σ-associativa.

OSSERVAZIONE 2. Restringendo alle probabilità la media (3), è facile vedere, normalizzando le masse considerate in questa nota, che esistono medie lineari che non sono σ-lineari.

BIBLIOGRAFIA

[1] GIROTTO B. e HOLZER S., *Some de Finetti-Kolmogoroff-Nagumo type integral representation theorems for means on masses*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste *20* (1988), 129-173.

[2] KOLMOGOROV A. e FOMIN S., *Elements de la theorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, Editions Mir. Mosca (1974).