

IL TRIPLO LINKING ED APPLICAZIONI NELLA TEORIA DEI DIFETTI DEI MEZZI ORDINATI (*)

di CORRADO TANASI (a Palermo) (**)

SOMMARIO. - Sulla frontiera S^3 di un 4-disco D^4 sia dato un link non banale di n componenti. Associamo a ciascuna componente un manico di dimensione 4 e di indice 2 con framing zero. Sulla 4-varietà liscia $W^4 = S^3 + \{\text{manici}\}$ ottenuta, definiamo un triplo linking. In questo lavoro dimostriamo l'esistenza di una relazione tra il triplo linking e il triplo prodotto di Sullivan sulla frontiera di W^4 provando come un'informazione (il triplo linking) data dal link su S^3 si traduce in un'informazione (triplo prodotto di Sullivan) sulla coomologia (di indice 1) relativa della 4-varietà W^4 rispetto al suo bordo (e viceversa). Si dimostra poi come il triplo linking è un invariante che permette (insieme ad altre condizioni) di decidere se un difetto, di tipo anelli di Borromeo, può essere o no topologicamente stabile nel senso della teoria dei difetti nei mezzi ordinati.

SUMMARY. - On the boundary S^3 of a 4-ball D^4 we consider a nontrivial link with n components. At each component of the link we attach a handle with zero framing. In the smooth 4-manifold $W^4 = S^3 + \{\text{handles}\}$ we define the triple linking number. This paper shows a relation between the triple linking number and the Sullivan's triple product on the boundary of W^4 proving that an information (the triple linking number) over the nontrivial link in the S^3 can be translated as a information over the relative cohomology of the 4-manifold W^4 with respect to its boundary (and vice versa). We also prove that the triple linking is a topological obstruction for linked singularities as Borromeo's links in condensed matter.

Introduzione. Lo "scenario" in cui si svolge la teoria dei difetti è uno spazio fisico M , (per noi sarà una varietà differenziabile) in cui è situato

(*) Pervenuto in Redazione l'8 marzo 1990.

Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca GNSAGA del CNR e con il contributo R.S. 60%.

(**) Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Matematica ed Applicazioni – Università degli Studi di Palermo – Via Archirafi, 34 – 90123 Palermo (Italy).

un aggregato molecolare; nei punti in cui il materiale è nello stato non eccitato, è definito un parametro d'ordine che ad ogni punto $x \in M$ associa il punto $\Phi(x)$ di uno spazio V chiamato la varietà degli stati interni. Usualmente la varietà degli stati interni è, nello spazio del parametro d'ordine, l'insieme dei punti corrispondenti ai possibili stati aventi la stessa energia. Alle alte temperature all'aggregato è associato un gruppo G di simmetrie. Il passaggio da una fase di alta temperatura ad una di bassa temperatura, comporta una rottura di simmetria. Si passa allora dal gruppo G ad un suo sottogruppo H . I difetti sono i punti corrispondenti alla fase di alta temperatura con gruppo di simmetria G e su questi punti il parametro d'ordine non è definito. Il parametro d'ordine è definito solo nei punti corrispondenti alla fase di bassa temperatura con gruppo di simmetria H . La varietà degli stati interni è (algebricamente) lo spazio quoziente $V = G/H$. I difetti comportano un costo energetico, per cui il mezzo fisico tenta di riorganizzarsi in modo che i difetti siano ridotti quanto più sia possibile. È utile sapere (soprattutto nei sistemi complessi come cristalli liquidi, elio 3 superfluido ecc.) se esiste un'ostruzione all'estensione del parametro d'ordine Φ sui punti di difetto ossia al rilassamento del mezzo verso una configurazione senza difetti. I difetti, nei mezzi ordinati, appaiono in configurazioni e strutture assai diverse. Il merito di aver messo ordine nella classificazione di tali varietà di casi, spetta ai francesi L. Michel, K. Toulouse e M. Kléman [5,6] e ai sovietici V.P. Mineev e G.E. Volovic [7,8]. Essi hanno sviluppato, contemporaneamente e indipendentemente, uno schema di classificazione dei difetti nei mezzi ordinati con il quale è possibile decidere sulla stabilità topologica (e quindi fisica) dei difetti nei cristalli liquidi, senza fare ricorso a considerazioni energetiche. Ora la teoria dei difetti dei cristalli liquidi e dei mezzi ordinati, elaborata dai due gruppi, decide sulla stabilità rispettivamente di punti, linee e pareti di difetto, coinvolgendo essenzialmente solo i gruppi di omotopia π_2 , π_1 , π_0 della varietà degli stati interni. In questa circostanza assume un ruolo centrale non tanto la struttura di gruppo delle classi di omotopia della varietà degli stati interni, quanto le loro classi di coniugazione (senza alcuna struttura algebrica). I lavori di V. Poénaru e di G. Toulouse [13,14] dimostrarono successivamente che anche la struttura algebrica dei gruppi di omotopia ha un ruolo importante nella dinamica dei difetti, perchè i commutatori non banali di tale struttura algebrica (la super-algebra dei gruppi di omotopia della varietà degli stati

interni), costituiscono un'ostruzione per l'incrocio dei difetti. Alla ricerca teorica si affiancava il finissimo studio sperimentale sui cristalli liquidi realizzato da Y. Bouligand [1]. Egli scopre che in un mezzo di tipo colesterico, taluni difetti si materializzano sotto forma di due anelli linkati. Questo link ha due proprietà: 1° è topologicamente (e quindi fisicamente) stabile, 2° tutte le ostruzioni (particolarmente quelle di V. Poénaru, G. Toulouse) conosciute sono nulle. Il lavoro [2] di Y. Bouligand, B. Derrida ecc. introduce un nuovo invariante (più fine) legato al gruppo $\pi_3 V$. Alcuni ricercatori (Volovic, Mineev ed altri) posero la questione se e come potesse intervenire, in questa teoria, il Massey-triple-product. Anche se quest'ultima questione sarà l'oggetto di un prossimo articolo, tuttavia per la sostanziale affinità tra il Massey-triple-product e il triplo linking (ciascuno di essi è costruito allorchè altri invarianti sono nulli) in questo lavoro riteniamo di poter dare una prima risposta al quesito.

Sulla frontiera S^3 del disco D^4 , dotato della sua struttura differenziabile standard, considereremo un link con un framing con il quale costruiremo, canonicamente, una 4-varietà W^4 con frontiera. Poi studieremo certi invarianti, in primo luogo il framing e poi il linking number e costruiremo un terzo invariante: il triplo linking che sarà definito solo quando i primi due sono nulli. Indagando sulle relazioni tra questi invarianti e altri invarianti topologici delle varietà di dimensione quattro con frontiera, dimostreremo come il fatto che il framing e il linking sono non nulli, si traduce in una informazione sulla interserzione nella coomologia relativa della 4-varietà, modulo il suo bordo. Se il framing ed il linking number sono nulli, appare una seconda relazione che lega il triplo linking al triplo prodotto di Sullivan sulla frontiera di W^4 . Cosicchè un'informazione (triplo linking) data da un link su S^3 si traduce in un'informazione (triplo prodotto di Sullivan) sulla coomologia relativa (di indice 1) della 4-varietà W^4 rispetto al bordo V^3 (e viceversa). Questo fatto sarà utilizzato per dimostrare che se su una 4-varietà, il framing ed il linking sono nulli e se il triplo linking è non nullo, questa varietà non può mai avere come frontiera $V_2^3 \cup_{id} V_2^3$, ove V_2^3 è una sfera di omologia meno n dischi. Il triplo linking si ispira ai lavori di D. Sullivan [15]. Mostriamo infine come il triplo linking è un invariante che permette (insieme ad altre condizioni) di decidere se un difetto, di tipo anelli di Borromeo, può essere o no topologicamente stabile nel senso della teoria dei difetti nei mezzi ordinati. In altri termini mo-

streremo l'esistenza di un'ostruzione all'estensione del parametro d'ordine Φ sopra linee di difetto (tipo anelli di Borromeo) che decide sul rilassamento del mezzo verso una configurazione omogenea.

1. Il disco 4-dimensionale D^4 , con frontiera la sfera 3-dimensionale S^3 , sarà supposto dotato della sua struttura differenziabile standard. Su S^3 sia dato un link L con n componenti (embeddings) $S^1 \xrightarrow{f_i} S^3$ ($i = 1, \dots, n$) in cui si suppone che se $i \neq j$, $\text{im } f_i \cap \text{im } f_j = \emptyset$. Nel seguito la notazione S_i^1 sostituirà l'immagine $f_i(S^1)$.

DEFINIZIONE 1. Se $n = 1$ il link S_1^1 si dirà nodo.

Un nodo in S^3 è fibrato [9] se esiste una fibrazione $S^3 - L \xrightarrow{f} S_1^1$

$$\begin{array}{ccc}
 S^3 - L & \xrightarrow{\psi} & S_1^1 \times D^2 \\
 f \searrow & & \swarrow \pi \\
 & S_1^1 &
 \end{array}$$

Un link è fibrato se è fibrata ogni sua componente S_i^1 ($i = 1, \dots, n$). Si richiede che la fibrazione abbia un buon comportamento in un intorno di ciascuna componente. Con ciò si intende dire che ogni componente del link dovrà possedere un intorno parametrizzato come $S_1 \times D_2$, in cui $S_i^1 \simeq S_1 \times 0$ (0 è il centro del disco D^2), e tale che la restrizione di f a $S^1 \times (D^2 - 0)$ sia l'applicazione in S^1 data da $(x, y) \rightarrow y/|y|$.

DEFINIZIONE 2. Chiameremo framing una banalizzazione del fibrato normale di un nodo in S^3 .

Modulo una isotopia che lascia il nodo fisso, i framings sono classificati da numeri interi. Esiste infatti una corrispondenza biunivoca tra le classi di isotopia di framings e le classi di omotopia delle applicazioni di S^1 nel gruppo $SO(2)$ (cf. ad esempio [4, o 12]). Per cui si passa, mediante $S^1 \xrightarrow{j} SO(2)$, da un framings ad un altro e tutti i framings di questo tipo, di fatto definiscono il gruppo fondamentale di $SO(2)$ ($\simeq \mathbb{Z}$) cosicchè due di essi differiscono per un numero intero.

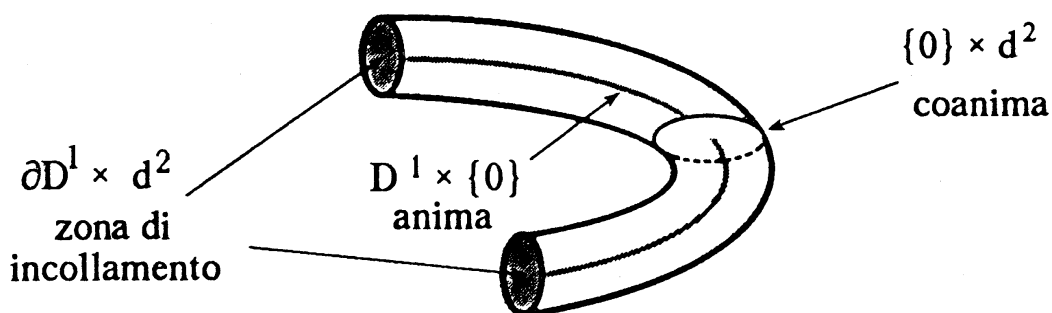
Costruiamo, canonicamente, una coppia $(W^4, V^3 = \partial W^4)$ data da una 4-varietà W^4 , avente V^3 (3-varietà chiusa) come frontiera.

Decomponiamo D^4 nel prodotto dei due dischi 2-dimensionali D^2 e d^2 . La frontiera $\partial(D^2 \times d^2)$ di D^4 si decompone in $\partial(D^2 \times d^2) = (\partial D^2 \times d^2) \cup (D^2 \times \partial d^2)$, ovvero in due anelli solidi allacciati e incollati lungo i loro bordi rispettivi.

Si incollino (in modo ovvio) le coppie $\partial D^2 \times d^2$ e $D^2 \times \partial d^2$ lungo la frontiera comune $\partial D^2 \times \partial d^2$. La regione $\partial D^2 \times d^2$ contenuta in $\partial(D^2 \times d^2)$, con la parametrizzazione naturale, si chiama zona (o regione) di incollamento.

DEFINIZIONE 3. La coppia $(D^2 \times d^2, \partial D^2 \times d^2)$, con la parametrizzazione naturale, si chiama *manico ordinario di dimensione quattro e di indice due*, i dischi $D^2 \times \{\text{centro del disco } d^2\}$, $\{\text{centro del disco } D^2\} \times d^2$ si chiamano rispettivamente *anima* e *coanima* del manico, mentre $\partial D^2 \times d^2$ dicesi *regione di incollamento*.

Un manico di dimensione n e indice λ è la coppia $(D^\lambda \times d^{n-\lambda}, \partial D^\lambda \times d^{n-\lambda})$.



Manico di indice 1 e dimensione 3

A ciascuna componente S_i^1 del link L (fibrato ed embedded in S^3), si associ un manico di dimensione 4 e indice 2 $(D_i^2 \times d_i^2, S_i^1 \times D_i^2)$ in cui $\partial d_i^2 = S_i^1$. Mediante l'applicazione identica, incolliamo la zona $S_i^1 \times D_i^2$ (contenuta nel bordo del manico) con $S_i^1 \times D_i^2$ pensata sulla frontiera S^3 di D^4 ($S^3 = \partial D^4$) e si rendano lisci i contatti [3 pag. 199]. Con questi dati iniziali definiamo W^4 nel modo seguente: $W^4 = S^3 + \cup_{i=1}^n (D_i^2 \times d_i^2, S_i^1 \times D_i^2)$, con frontiera $\partial W^4 = V^3$ una 3-varietà orientabile.

OSSERVAZIONE. Si sa che

TEOREMA 1. *Ogni varietà chiusa orientabile V^3 si costruisce in questo modo.*

In altri termini scegliendo vari links e vari framings è possibile costruire tutte le varietà orientabili V^3 [10]. Studiamo ora tre forme di incidenza risultanti da una o due o tre scelte di embeddings $f_i (i = 1, \dots, n)$. Precisamente consideriamo i tre casi

- A) FRAMING,
- B) LINKING,
- C) TRIPLO LINKING.

CASO A)

Tra i framings ci soffermeremo su uno in particolare: il framing "nullo", che definiremo in due modi equivalenti.

Primo modo. Consideriamo una componente del link. Ora classicamente, si sa che

TEOREMA 2. *Esiste (sempre) una varietà orientabile (non unica) $V^2 \hookrightarrow S^3$, la cui frontiera ∂V^2 è un nodo. La superficie V^2 si chiama superficie di Seifert.*

Ora su un intorno tubolare pieno $S_i^1 \times D^2$ del nodo, in cui sia $S_i^1 \times \{\text{centro di } D^2\} = S_i^1$ si consideri la parametrizzazione di D^2 data dalle sue coordinate polari (ρ, θ) . Si dimostra che, modulo un'isotopia che lascia il nodo fisso, la parametrizzazione $(S_i^1 \times D^2) \cap V^2 = \{\theta = \text{costante}\}$ è unica [9]. Allora

DEFINIZIONE 4. *Un framing del nodo fibrato si dice nullo se la parametrizzazione $S_i^1 \times D^2$ in un intorno U di $S_i^1 \times \{0\}$ è data da un sistema di assi X, Y di origine $x \times \{0\}$ ($x \in S_i^1$), con asse X normale al nodo e asse Y tangente alla superficie di Seifert.*

Secondo modo. Il nodo è anche bordo di un ciclo relativo 2-dimensionale di D^4 . Questo significa che il cerchio $S_i^1 \times \{0\} \subset S^3 (\approx \partial D^4)$ è

bordo di un disco orientato D^2 di dimensione 2. Allo stesso modo, sia x un punto diverso da 0 che appartiene ad un intorno di 0 e sia $S^1 \times \{x\}$ il bordo di un disco D_x^2 , pure orientato, di dimensione due. Disponiamo allora di un'orientazione su D^2 e di un'altra (coerente a quella di D^2) sul disco D_x^2 e dell'orientamento su D^4 . La situazione è rappresentata dai seguenti diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} D^2 & \xrightarrow{\varphi \in C^\infty} & D^4 \\ \approx \uparrow & & \uparrow \approx \\ \partial D^2 \approx S^1 & \xrightarrow{\approx} & S^3 \end{array}$$

e per il disco D_x^2

$$\begin{array}{ccc} D_x^2 & \xrightarrow{\varphi' \in C^\infty} & D^4 \\ \approx \uparrow & & \uparrow \approx \\ \partial D_x^2 \approx S^1 \times (x) & \xrightarrow{\approx} & S^3 \end{array}$$

È sempre possibile cambiare un poco la posizione dei dischi D^2 e D_x^2 in modo che essi si taglino trasversalmente in un numero finito di punti [11]. In un loro generico punto comune ($y \in D^2 \cap D_x^2$) gli spazi tangenti $T_y D^2$ e $T_y D_x^2$ sono orientati. Vogliamo dare un segno al punto comune y . La scelta del segno è subordinata al confronto degli orientamenti tra una base di $T_y D^4$, una base di $T_y D^2$ (orientata) e quindi con una base di $T_y D_x^2$ (orientata). Se gli orientamenti delle basi di $T_y D^4$, di $T_y D^2$ e quindi di $T_y D_x^2$ sono coerenti si attribuirà al punto y il segno positivo, se non sono coerenti si assegnerà ad y il segno negativo. Se si inverte l'orientamento su $T_y D^2$, il segno di y non cambia perchè simultaneamente si inverte anche l'orientamento di $T_y D_x^2$. Allo stesso modo se cambia l'orientamento su S^1 , gli orientamenti sia di $T_y D^4$ che di $T_y D_x^2$ cambiano insieme e il segno di y non cambia. Se si inverte l'ordine con cui si succedono D^2 e D_x^2 anche in questo caso il segno di y non cambia. Dunque il segno di y dipende essenzialmente dall'orientamento di D^4 .

DEFINIZIONE 5. Diremo *framing di un nodo* la somma algebrica dei segni associati a tutti i punti comuni ai cicli orientati D^2 e D_x^2 . In formula

$$Fr(D^2, D_x^2) = \sum_{y \in D^2 \cap D_x^2} \text{sign}(y),$$

Le definizioni di framing nullo delle definizioni 4 e 5 sono equivalenti. Consideriamo infatti i vettori normali alla superficie di Seifert V_1^2 del nodo $S_1^1 (= S_1^1 \times \{0\})$. Un'omotopia che muove la superficie di Seifert V_1^2 (orientabile) secondo la direzione data da tali vettori, distacca la superficie iniziale V_1^2 , dando luogo ad una superficie finale \tilde{V}_1^2 (superficie di Seifert del nodo spostato $S_1^1 \times \{x\}$) che non incontra la precedente. D'altra parte poichè ciascun nodo è frontiera relativa 2-dimensionale di un ciclo relativo in D^4 , se aggiungiamo a questi due cicli relativi le superfici di Seifert V_1^2 e \tilde{V}_1^2 corrispondenti ai nodi $S_1^1 \times \{0\}$ e $S_1^1 \times \{x\}$, otteniamo due superfici chiuse (cicli assoluti) di D^4 che si incontrano in un numero pari di punti.

CASO B)

In modo simile al caso A), si definisce il linking number. Con due componenti distinte del link $f_i : S^1 \hookrightarrow S^3$ ed $f_j : S^1 \hookrightarrow S^3$ $i \neq j$ ($i, j = 1, \dots, n$), si opera la stessa costruzione fatta nel caso del framing, sostituendo però ai cicli orientati D^2 e D_x^2 i dischi orientati D_i^2 e D_j^2 i cui bordi sono rispettivamente le componenti (orientate) del link S_i^2 e S_j^2

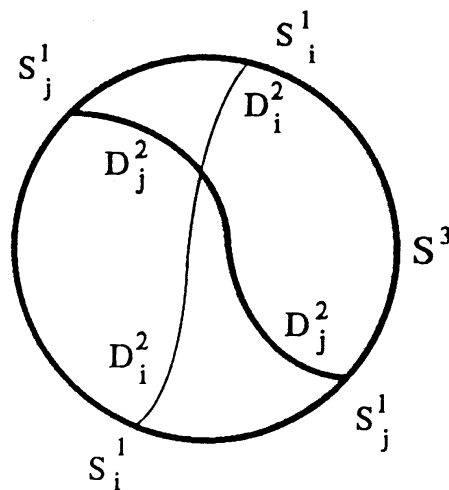


fig.1

DEFINIZIONE 6. Se D_i^2 e D_j^2 sono rispettivamente dischi i cui i bordi orientati sono rispettivamente le componenti del link S_i^2 e S_j^2 , si chiama linking number di S_i^2 e S_j^2 [9] il numero ottenuto sommando algebricamente i segni (± 1) associati a tutti i punti di incontro tra i dischi D_i^2 e

D_j^2 . In formula

$$Lk(S_i^1, S_j^1) = \sum_{x \in D_i^2 \cap D_j^2} \text{sign}(x).$$

Il linking number dipende solo dalla scelta degli orientamenti dei nodi ma non solo dal modo in cui essi si succedono. Per cui Lk è un operatore simmetrico rispetto agli indici i, j . D'ora in avanti per un link con n componenti, il linking number $Lk(S_i^2, S_j^2)$ sarà definito per ogni scelta degli indici i e j nell'insieme $(1, \dots, n)$.

OSSERVAZIONE. Se in S^3 tre nodi J, K e Z sono tali che J e K siano bordo di una superficie in S^3 che non tocca il terzo nodo Z , allora $Lk(J, Z) = Lk(K, Z)$.

2. Studiamo l'effetto congiunto (*framing + linking*) sulla coppia (W^4, V^3) . Indichiamo con $H^2(W^4, \text{mod } V^3)$ la coomologia relativa 2-dimensionale di W^4 che supporremo d'ora in avanti, salvo esplicito avviso contrario, a coefficienti in \mathbf{R} o in \mathbf{Q} . Tale coomologia è definita da cocatene di dimensione 2 di W^4 che hanno le loro cofrontiere in V^3 . Più esplicitamente un cociclo di $H^2(W^4, \text{mod } V^3)$ è in relazione duale con le catene 2-dimensionali di W^4 che hanno la frontiera in V^3 . Nel nostro caso tale dualità si esplica mediante superfici orientate S^2 (ciclo relativo 2-dimensionale di $H^2(W^4, \text{mod } V^3)$), non necessariamente immerse, del tipo $(S^2, \partial S^2) \rightarrow (W^4, V^3)$. In particolare una superficie chiusa V^2 orientata, contenuta in $\text{int}W^4$, è un tale cociclo di $H^2(W^4, \text{mod } V^3)$

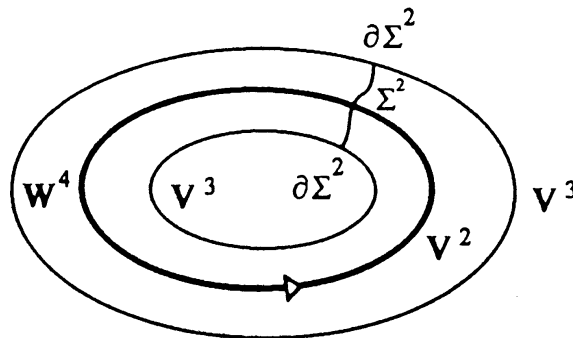


fig.2

Ora le superfici S^2, V^2 sono orientate, per cui è lecito porre la seguente regola di accoppiamento

DEFINIZIONE 7. *Per definizione*

$$\langle V^2, S^2 \rangle = \sum \{ \text{dei punti comuni di } V^2 \text{ e di } S^2 \} .$$

Generalmente i gruppi di coomologia $H^*(W^4, \text{mod } V^3)$ hanno struttura di spazio vettoriale graduato, ed ammettono la decomposizione

$$H^0(W^4, \text{mod } V^3) + H^1(W^4, \text{mod } V^3) + \dots + H^4(W^4, \text{mod } V^3) .$$

Ora $H^4(W^4, \text{mod } V^3)$ essendo di dimensione massima, contiene il *cociclo (relativo)* fondamentale, per cui $H^4(W^4, \text{mod } V^2)$ è canonicamente isomorfo a \mathbf{R} . In generale tra gli spazi di coomologia è definita una operazione di cup-product $H^p \times H^q \xrightarrow{\cup} H^{p+q}$, che induce in $H^*(W^4, \text{mod } V^2)$ una struttura di super-algebra. A noi interesserà il cup-product nel caso $p = q = 2$, $H^2 \times H^2 \xrightarrow{\cup} H^4 \approx \mathbf{R}$, che induce la seguente regola di accoppiamento tra cocicli.

DEFINIZIONE 8. *Se $[V_1^2]$ e $[V_2^2]$ sono le classi di coomologia di superficie chiuse e orientate, allora il cup-product tra $[V_1^2]$ e $[V_2^2]$ è*

$$[V_1^2] \cup [V_2^2] = \sum \{ \text{dei punti comuni di } V_1^2 \text{ e di } V_2^2 \} .$$

Si tratta ora di studiare come incide l'effetto congiunto (*framing, linking*) sulla struttura di cup-product in (W^4, V^3) . Quando da un nodo di un link, con framing, si passa (attraverso i manici) a (W^4, V^3) , si crea la situazione seguente: in maniera canonica, ad ogni componente orientata del link si aggancia una classe di coomologia $H^2(W^4, V^3)$, che denoteremo con $[S_i^2]$. Se D_i^2 è il disco orientato, di cui S_i^1 è bordo, un rappresentante di tale classe è dato da $S_i^2 = D_i^2 + \{ \text{anima del manico di indice 2 e di dimensione 4} \}$ (cf. fig.3) per cui $(S_i^2, \text{framing}) \hookrightarrow [S_i^2] \in H^2(W^4, \text{mod } V^3)$

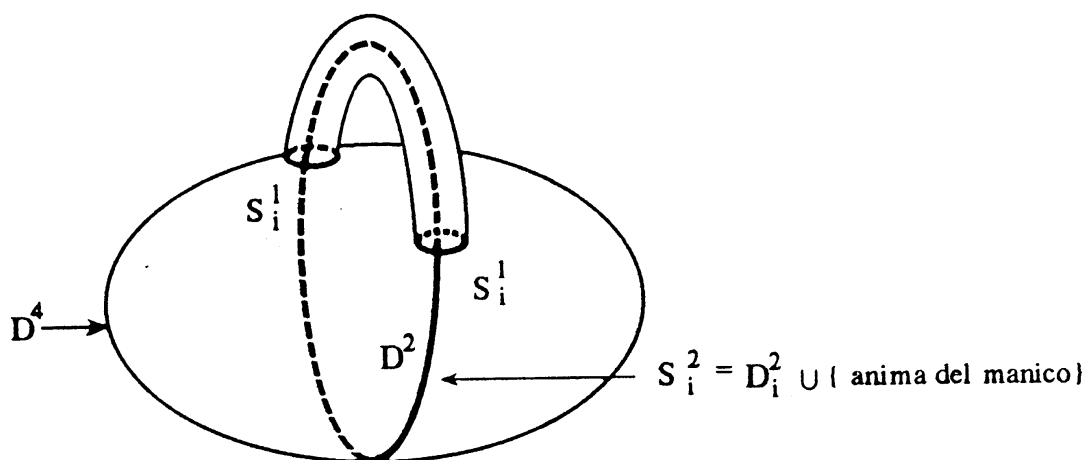


fig.3

Con quanto fin qui si è detto, dimostriamo il seguente

TEOREMA 3.

- A) Il cup-product $[S_i^2] \cup [S_j^2]$ è l'intero associato al framing.
 B) Qualunque sia il framing, se S_i^2 è distinto da S_j^2 , allora il cup-product sarà

$$[S_i^2] \cup [S_j^2] = Lk(S_i^1, S_j^1) .$$

OSSERVAZIONE. Il teorema suggerisce che se si passa, mediante i manici, da un link con framing a (W^4, V^3) si ottiene una matrice simmetrica la cui diagonale principale proviene dal framing e gli altri elementi dal linking.

Dimostrazione. La parte A) del teorema risulta dal fatto che i punti d'incontro tra S_i^2 e S_j^2 non dipendono dai manici associati alle componenti del link, perchè i manici non hanno (tra loro) punti comuni.

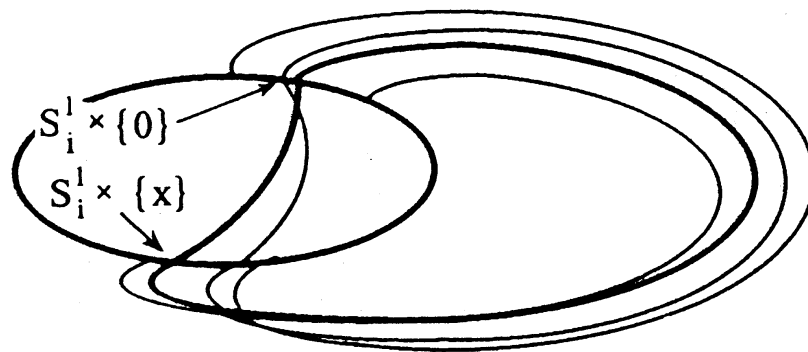


fig.4

Il linking number tra S_i^1 e S_j^1 è, per definizione, la somma algebrica dei segni (± 1) associati a tutti i punti comuni ai cicli orientati D_i^2 e D_j^2 di cui S_i^1 e S_j^1 sono bordi. Ora poichè i manici associati alle componenti del link S_i^1 e S_j^1 non hanno punti comuni, il cup-product tra le classi di coomologia $[S_i^2]$, $[S_j^2]$ è la somma algebrica dei segni (± 1) associati a tutti i punti comuni ai cicli orientati D_i^2 e D_j^2 .

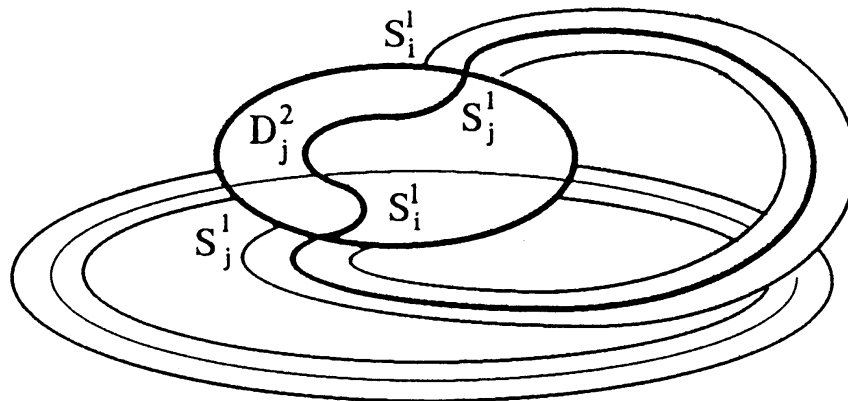


fig.5

3. Quando un invariante ha esaurito la sua “quantità di informazione” (cioè è nullo), un nuovo invariante (secondario) può essere definito a partire dal vecchio. Il nuovo invariante che ci apprestiamo a introdurre, è triplo linking. *Supponiamo* ora che, qualunque siano gli indici i e j ($i \neq j$), il linking number di S_i^1 e S_j^1 sia nullo. Si voglia “migliorare” (nel senso

che tra poco chiariremo) la superficie di Seifert V_i^2 relativa al nodo S_i^1 . Ora è sempre possibile assumere che il nodo S_i^1 sia trasversale a V_j^2 ($i \neq j$). Si fissi un orientamento sulla sfera S^3 . Sia p un punto di $V_i^2 \cap S_j^1$. L'orientamento della componente S_i^1 del link, insieme all'orientamento indotto da V_i^2 su un piccolo disco di V_i^2 di centro p , induce un orientamento su S^3 . Tale orientamento può essere concorde o discorde all'orientamento prefissato su S^3 . In questo modo a ciascun punto di $V_i^2 \cap S_j^1$ si può assegnare un segno che sarà scelto positivo se vi è concordanza tra i due orientamenti, negativo se vi è discordanza

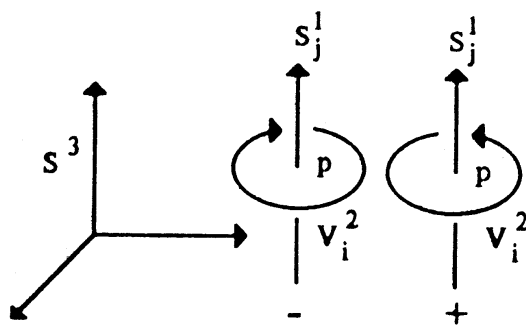


fig.6

Possiamo enunciare la seguente definizione di linking number in termini di superfici di Seifert.

DEFINIZIONE 9. Si chiama *linking number* $Lk(S_i^1, S_j^1)$ tra le componenti del link S_i^1 e S_j^1 , il numero ottenuto sommando algebricamente i segni (± 1) associati a tutti i punti di incontro tra V_i^2 e S_j^1 .

L'equivalenza tra le definizioni 9 e 6 è ovvia. Se il linking number di S_i^1 e S_j^1 è nullo, l'intersezione tra V_i^2 e S_j^1 sarà un insieme di punti i cui segni positivi saranno tanti quanti i segni negativi.

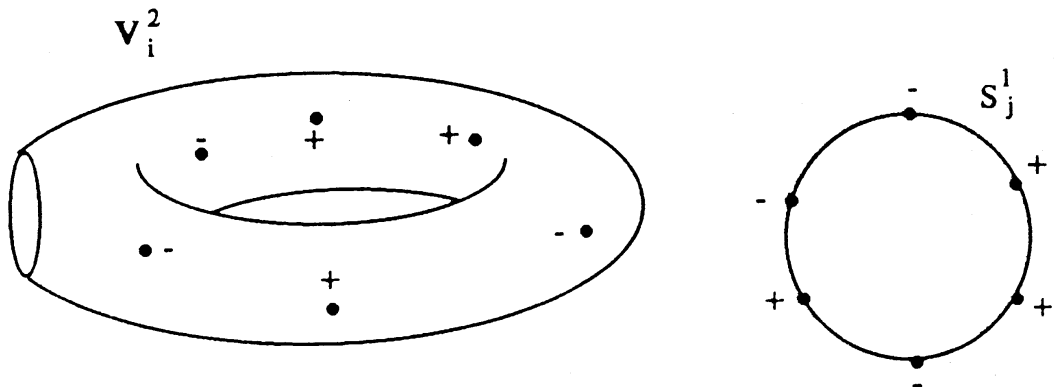


fig.7

Se una coppia di punti consecutivi ha segni opposti, si dirà *minimale*. Nel caso nostro esiste sempre una coppia minimale. Una coppia di punti minimale si può sopprimere modificando la superficie nel modo che segue. Appoggiamo un manico di indice 1 e di dimensione 3 sulla superficie, togliamo la zona di incollamento e lasciamo la superficie laterale

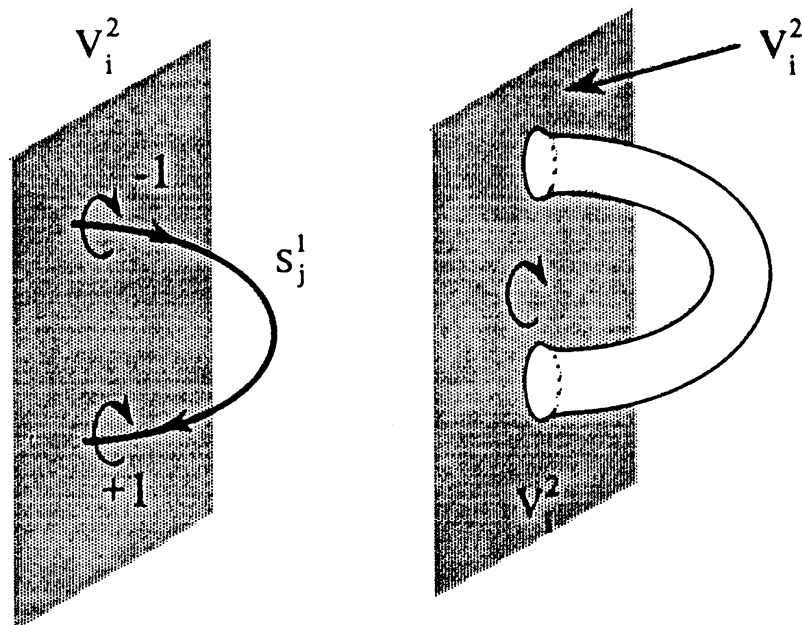


fig.8

L'operazione di sopprimere coppie minimali sarà continuata fino all'esaurimento dei punti comuni tra V_i^2 e S_j^1 . Il risultato è una superficie

di Seifert (*orientabile*) che chiameremo “migliorata”, in cui tutti i punti di contatto tra V_i^2 e S_j^1 sono scomparsi. Allo stesso modo si può migliorare la superficie di Seifert V_j^2 . Dal contesto sarà chiaro se (nel seguito) V_1^2 sarà la superficie di Seifert migliorata o no. Quanto detto ci permette di enunciare il seguente

TEOREMA 4. *Se il linking number $Lk(S_i^1, S_j^1)$ è nullo, esiste un sistema di superficie di Seifert tale che $V_i^2 \cap S_j^1 = \emptyset$ se $i \neq j$.*

Da questo punto in poi lavoreremo con un tale sistema di superficie.

CASO C)

Consideriamo ora tre componenti distinte e orientate S_i^1, S_j^1 e S_k^1 ($i \neq j \neq k \neq i$) del link L e le superficie di Seifert corrispondenti V_i^2, V_j^2 e V_k^2 . Un teorema generale di trasversalità [11] afferma che è sempre possibile, con piccoli movimenti, porre le tre superficie V_i^2, V_j^2 e V_k^2 in posizione generica, in modo che esse si incontrino trasversalmente. Cioè si può fare in modo che i piani tangenti, nei punti di incontro, siano *localmente* a due a due ortogonali (fig.9). Occorre osservare che per ottenere questa situazione locale bisogna fare due passi successivi, il primo lo fornisce la teoria di trasversalità infinitesimale [11], che ci permette di collocare i piani tangenti a due a due ortogonali, il secondo passo è dato dal teorema delle funzioni inverse quando afferma che una situazione locale come questa, si conserva anche a livello locale infinitesimale

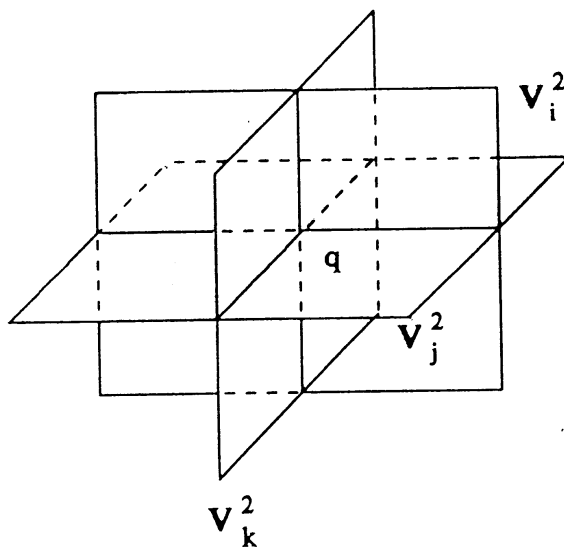


fig.9

Ora l'intersezione tra le due superficie V_i^2, V_j^2 è una collezione finita Γ di curve (orientabili) *chiuse*, differenziabili, a due a due disgiunte (un link) che non incontra il link iniziale. Assegniamo agli indici, una volta per tutte, l'ordine i, j e k . La varietà V_i^2 è orientata, con orientamento locale (in un punto q comune alle superfici V_i^2, V_j^2) dato da un vettore (unitario) n_i ortogonale a V_i^2 , tangente (in q) alla superficie V_j^2 . Anche la superficie è orientata quindi localmente nel punto q , dove è applicato un vettore (unitario) n_j ortogonale a V_j^2 e tangente alla superficie V_i^2 (fig.10).

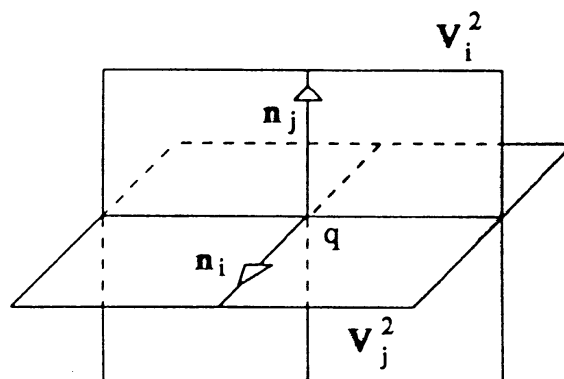


fig.10

I vettori (n_i, n_j) formano un sistema di riferimento dello spazio normale a $V_i^2 \cap V_j^2$. Scegliamo in q il vettore (unitario) n_k in modo tale che la terna (n_i, n_j, n_k) formi un sistema di riferimento concorde all'orientamento prefissato sulla sfera S^3 . Il vettore n_k orienta le curve Γ e tale orientamento cambia tutte le volte che cambia l'ordine in cui si succedono gli indici i e j . Sia x un punto d'incontro tra un curva della collezione Γ (si ricordi che tali curve sono tutte orientate) e la superficie orientata V_k^2 . A ciascuno di tali punti (che sono in numero finito) si può assegnare un segno positivo o negativo a seconda che gli orientamento locali in x della curva di Γ e della superficie V_k^2 , siano (rispettivamente) concordi o discordi a quello di S^3 .

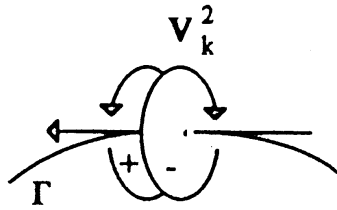


fig.11

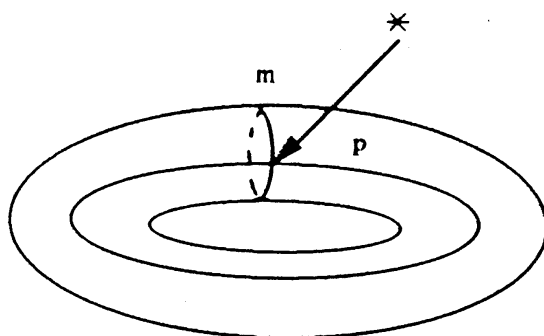
DEFINIZIONE 10. Si definisce *triplo linking (TLk)* di S_i^1 , S_j^1 e S_k^1 il numero ottenuto sommando algebricamente i segni (± 1) associati a tutti i punti di incontro tra le curve (chiuse, differenziabili a due a due disgiunte) della collezione Γ e la superficie di Seifert V_k^2 . In formula

$$TLk(S_i^1, S_j^1, S_k^1) = \sum_{x \in \Gamma \cap V_k^2} \text{sign}(x).$$

È facile dimostrare che TLk è, rispetto agli indici i, j e k , un operatore antisimmetrico. D'ora in avanti per un link con n componenti il triplo linking sarà definito per ogni scelta della terna di indici (distinti) i, j e k nell'insieme $(1, \dots, n)$.

4. Sia V^3 una 3-varietà orientabile e chiusa. D. Sullivan definisce [15] in V^3 una tripla forma antisimmetrica $H^1 V^3 \times H^1 V^3 \times H^1 V^3 \rightarrow H^3 V^3 \simeq \mathbf{R}$ a cui è associato il cup-product $\alpha \cup \beta \cup \gamma \rightarrow \mathbf{R}$ con $\alpha, \beta, \gamma \in H^1 V^3$. Sullivan prova che ogni tripla forma antisimmetrica su uno spazio vettoriale, è sempre realizzata come tripla forma (antisimmetrica) definita sopra una varietà V^3 orientabile e chiusa. Supponiamo ora che tutti i linking numbers e tutti framings siano nulli. Ad ogni S_i^1 associamo una classe di coomologia di dimensione 1 della frontiera V^3 di W^4 che denoteremo con $[S_i^1] (\in H^1 V^3)$. Tale classe si costruisce nel modo seguente: la superficie di Seifert V_i^2 se $i \neq j$ è disgiunta da S_j^1 (vedi teorema 4), e $V_i^2 \hookrightarrow S^3 - \{\text{tutte le altre componenti del link distinte da } S_i^1\}$. Si consideri un intorno

tubolare pieno $T \approx S_i^1 \times D^2 (\rightarrow S^3)$ di S_i^1 già parametrizzato. Sulla frontiera $\partial(S_i^1 \times D^2)$ si consideri la curva meridiana $m(\approx S^1 \times \{*\})$ e la curva parallela standard $p(\approx \{*\} \times S^1, \text{ con } * \in \partial T)$



Operiamo una chirurgia consistente nel togliere la parte interna del toro pieno T e ridistribuire la parte asportata sulla sua frontiera, con il risultato di scambiare il meridiano m col parallelo p . La chirurgia in questione si può ritenere anche come la *traccia* sulla frontiera S^3 (del disco D^4) dell'aggiunta di un manico di indice 2 (e dimensione 4) (fig.14). Vediamo qual'è la conseguenza della chirurgia sulla curva c data dall'intersezione tra la superficie di Seifert V_i^2 del nodo S_i^1 e la frontiera dell'intorno tubolare $S_i^1 \times D^2$ (con framing nullo)

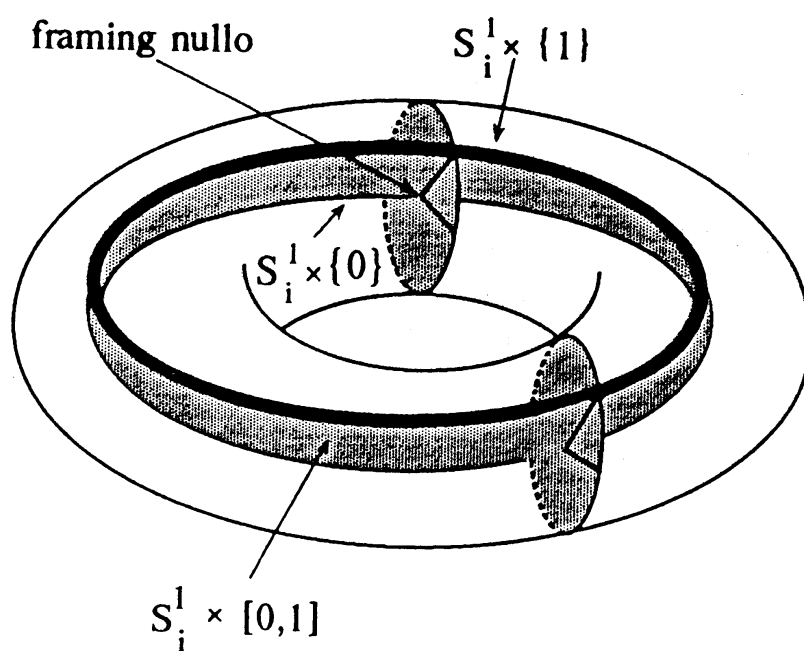


fig.12

La situazione prima della chirurgia così si schematizza

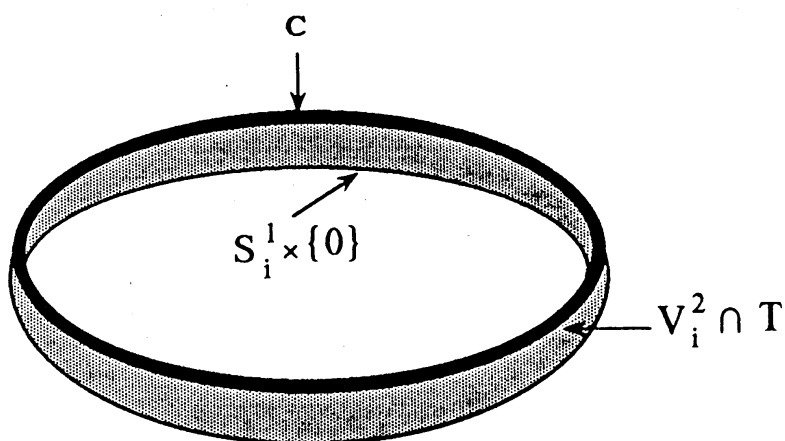


fig.13

Dopo la chirurgia la curva $c (= S_i^1 \times \{1\})$ viene "tappata" da un disco \tilde{D} .

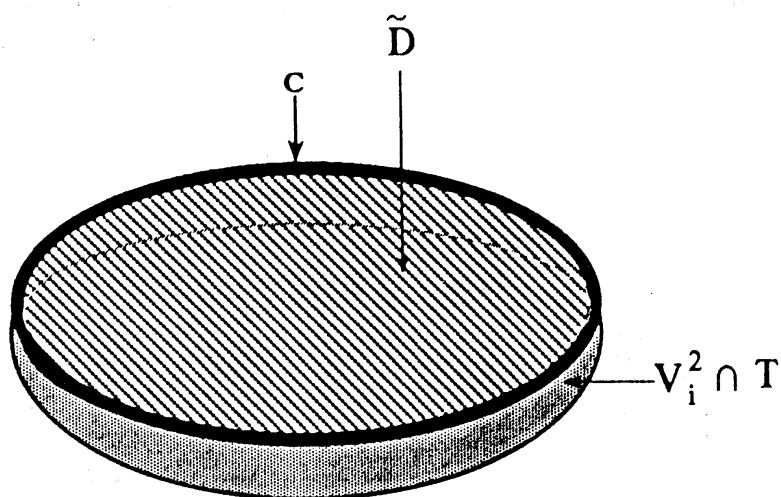


fig.14

Poniamo $\tilde{V}_1^2 = \{V_1^2 - (S_i^1 \times [0, 1])\} \cup \tilde{D}$. Dunque $\partial \tilde{D}$ è frontiera sia di \tilde{V}_1^2 che di \tilde{D} . Ma sia \tilde{V}_1^2 che \tilde{D} sono contenute in V^3 e la loro parte comune è *solo* la frontiera, per cui \tilde{V}_1^2 è in V^3 una superficie chiusa

ed orientata. Siamo così passati da nodo S_i^1 ad una superficie orientata di V^3 che si può interpretare, viste le ipotesi (framing=linking=0), come classe di coomologia di indice uno $[S_i^1]$ di V^3 (dualità di Poincaré). Questa operazione va ripetuta componente per componente.

Il teorema che segue, mostra come un'informazione (il triplo linking) ottenuta da un (certo tipo di) link su S^3 , si traduce in un'informazione (triplo prodotto di Sullivan) sulla coomologia (di indice 1) relativa della varietà 4-dimensionale W^4 rispetto al bordo V^3 (e viceversa).

TEOREMA 5. *Su una 3-sfera S^3 , bordo di un 4-disco, è definito un link con n componenti. Si aggiungano, canonicamente, su S^3 n manici di indice 2 e dimensione 4, con framing nullo. Se il linking number è nullo, allora il triplo prodotto di Sullivan $[S_i^1] \cup [S_j^1] \cup [S_k^1]$ è uguale, per ogni scelta di i, j e k ($i \neq j \neq k \neq i$), al triplo linking di S_i^1, S_j^1 e S_k^1 .*

Dimostrazione. Il triplo prodotto di Sullivan si ottiene sommando i segni (± 1) dei punti di incontro delle tre superficie chiuse $\tilde{V}_1^2, \tilde{V}_j^2$ e \tilde{V}_k^2 , poste in posizione generica, ottenute dalla costruzione precedente e associate alle componenti del link S_i^1, S_j^1 e S_k^1 . Ma tale numero è uguale al numero che si ottiene sommando i segni dei punti di incontro delle tre corrispondenti superfici di Seifert. Si tenga presente che i tre dischi (uno per ogni componente) del tipo \tilde{D} , ottenute dalla chirurgia, non si incontrano. Si osservi inoltre che le superficie chiuse \tilde{V}_i^2 ($i = 1, \dots, n$) sono ben definite a livello di V^3 per due ragioni, la prima è che il framing e il linking sono nulli, la seconda è che i manici sono disgiunti.

5. Applicazione (del teor. 5) alle sfere di omologia. Una sfera di omologia è una 3-varietà chiusa, il cui il gruppo di omologia $H_1(V_i^3, \mathbf{Z})$, a coefficienti in \mathbf{Z} , è nullo. In questo caso il gruppo fondamentale $\pi_1 V_i^3$ coincide con il suo commutatore $[\pi_1, \pi_1]$; ciò vuol dire che il gruppo $\pi_1 V_i^3$ non è commutativo. Si considerino n dischi D_i^3 a due a due disgiunti ($i = 1, \dots, n$) e sia

$$V_2^3 = V_1^3 - \cup_{i=1}^n \text{int } D_i^3$$

una varietà compatta con frontiera

$$\partial V_2^3 = \cup_{i=1}^n \{2\text{-sfere } (= \partial D_i^3)\}.$$

Anche per V_2^3 si ha che l'omologia $H_1(V_2^3, \mathbf{Z}) = 0$.

TEOREMA 6.

a) Se la varietà $W_2^4 = V_2^3 \times [0, 1]$ è un disco D^4 con un link (di n componenti) sulla sua frontiera su cui si aggiungono (canonicamente) n manici di indice 2, allora il framing ed linking sono nulli.

b) Se la 4-varietà W_2^4 ha framing e linking nulli e se $\partial W_2^4 = V_2^3 \cup_{id} V_2^3$, allora il triplo linking è pure nullo.

Dimostrazione.

a) Sia nel framing che nel linking accade che se si considerano due 2-cicli c_2 e c'_2 distinti o no in $\text{int}W_2^3$, essi si possono trasformare in cocicli $[c_2], [c'_2]$ del gruppo di coomologia relativa $H^2(W_2^3, \partial W_2^3)$. Si dovrà provare che il cup-product $[c_2] \cup [c'_2]$ è nullo (allora framing=linking=0). Ora $\text{int}W_2^3, W_2^3$ e V_2^3 hanno lo stesso tipo di omotopia, infatti si consideri l'inclusione $V_2^3 \xrightarrow{j} W_2^3$, che manda x in $(x, 1/2)$; j è un'equivalenza di omotopia, per cui dati i due cicli c_2 e c'_2 esistono, omologicamente parlando, in corrispondenza due cicli γ_2 e γ'_2 tali che se $[\gamma_2]$ e $[\gamma'_2]$ sono le corrispondenti classi di omologia, allora $j_*[\gamma_2] = [c_2]$ e $j_*[\gamma'_2] = [c'_2]$. Passiamo alle classi di coomologia $[j_*[\gamma_2]]$ e $[j_*[\gamma'_2]]$. Si tratta di dimostrare che in $H^2(W_2^3, \partial W_2^3)$ il cup-product $[j_*[\gamma_2]] \cup [j_*[\gamma'_2]]$ è nullo. Si consideri l'embedding $V_2^3 \xrightarrow{j} W_2^3 = V_2^3 \times [0, 1]$. Anche se i cicli γ_2 e γ'_2 di V_2^3 , a priori, possono avere punti comuni

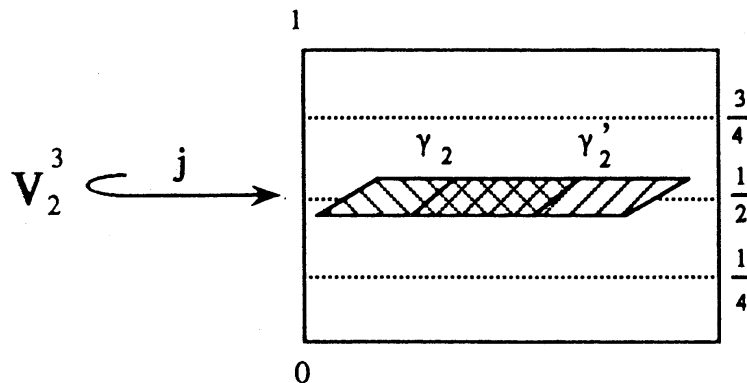


fig.15

è sempre possibile separarli. Tale separazione è resa possibile, senza distruggere l'omologia o la coomologia, passando da γ_2 a $\tilde{\gamma}_2 (= \gamma_2 \times 3/4)$ e da γ'_2 a $\tilde{\gamma}'_2 (= \gamma'_2 \times 1/4)$.

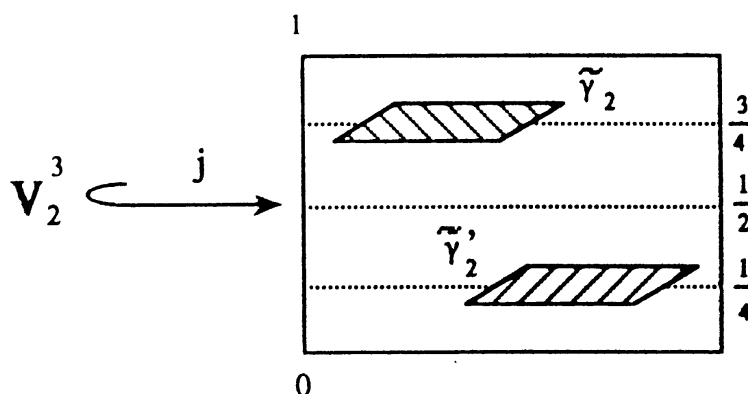


fig.16

I cicli $\tilde{\gamma}_2$ e $\tilde{\gamma}'_2$ non hanno punti comuni, per cui $[j_*[\gamma_2]] \cup [j_*[\gamma'_2]] = 0$.

Nella precedente dimostrazione non interviene il fatto che V_i^3 sia una sfera di omologia ma interviene solo la struttura prodotto $(V_2^3 \times [0, 1])$ di W_2^3 .

Per dimostrare il punto b) del teorema si supponga, per assurdo, che $TLk(S_i^1, S_k^1) \neq 0$ ($i \neq j \neq k \neq i$), in tal caso per il teorema 5, il triplo prodotto di Sullivan corrispondente è non nullo, ma V_2^3 è senza omologia (o coomologia), perchè una sfera di omologia non ha omologia (o coomologia) di dimensione 1, dunque anche il triplo prodotto è nullo. Allora se su un disco di dimensione quattro sulla cui frontiera è embedded un link (con n componenti), si aggiungono n manici con framing nullo, se il linking number è nullo ma non il triplo linking, questa varietà non può avere come frontiera la 3-varietà $V_2^3 \underset{id}{\cup} V_2^3$.

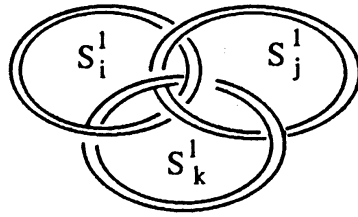


fig.17

sono un esempio di link in cui il linking number è nullo [9], ma non il triplo linking. Infatti scegliamo opportune superficie di Seifert dei nodi S_i^1 , S_j^1 e S_k^1 . Le superfici di Seifert V_i^2 ed V_j^2 dei due nodi S_i^1 ed S_j^1 , siano date da un disco su cui si incolla un manico di indice uno e dimensione tre

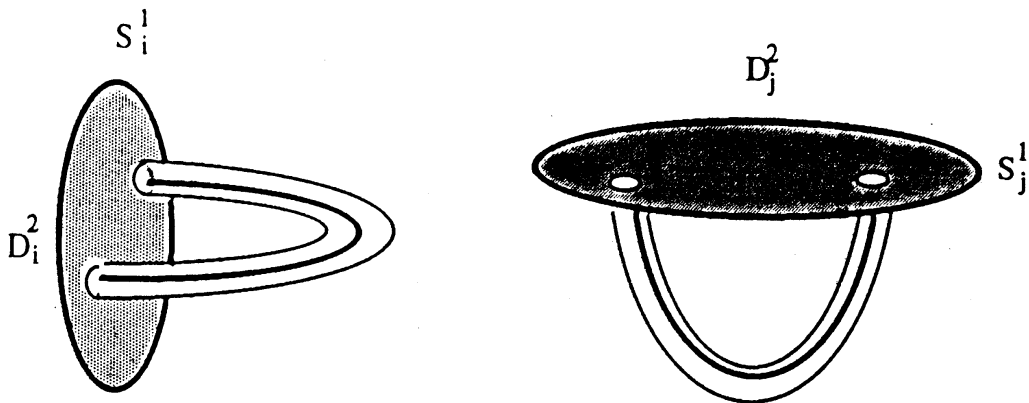


fig.18

Le superfici di Seifert V_i^2 ed V_j^2 si incontreranno lungo la curva L che è linkata al nodo S_k^1 .

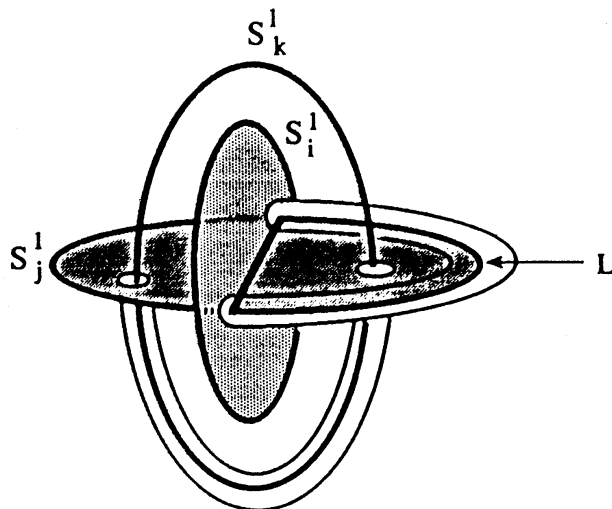


fig.19

Qualunque superficie di Seifert del nodo S_k^1 , incontra la curva L in almeno un punto (fig.19).

6. Costruzione di un modello. Lo spazio fisico M^3 sia una 3-varietà liscia, compatta, orientabile e connessa. Indichiamo con Σ un sottoinsieme di M^3 . Nei punti non appartenenti a Σ è data una applicazione continua Φ da M^3 in uno spazio topologico V . L'applicazione $M^3 - \Sigma \xrightarrow{\Phi} V$ si chiama parametro d'ordine, lo spazio topologico V dicesi spazio del parametro d'ordine o varietà degli stati interni, Σ chiamasi l'insieme dei difetti [cf. appendice] di M^3 .

Supponiamo che la varietà degli stati interni sia una 3-varietà V^3 e che

- a) il gruppo $\pi_1 V^3$ sia abeliano e non nullo,
- b) il gruppo $\pi_2 V^3 = 0$ (non esistono cioè punti di difetto stabili).

Se l'insieme delle linee di difetto Σ è un link con n componenti, dimostriamo che il triplo prodotto di Sullivan [10] (o il triplo linking) costituisce un'ostruzione possibile alla stabilità topologica delle linee di difetto data da un link Σ . Per ciascun nodo S_i^1 ($i = 1, \dots, n$) costruiamo un intorno tubolare normale nello spazio fisico M^3 . Esaminiamo in particolare l'intorno tubolare $N(S_i^1)$ della componente S_i^1 . Sia c_i il cammino chiuso dato dall'incontro tra la superficie di Seifert V_i^2 del nodo e l'intorno tubolare $N(S_i^1)$.

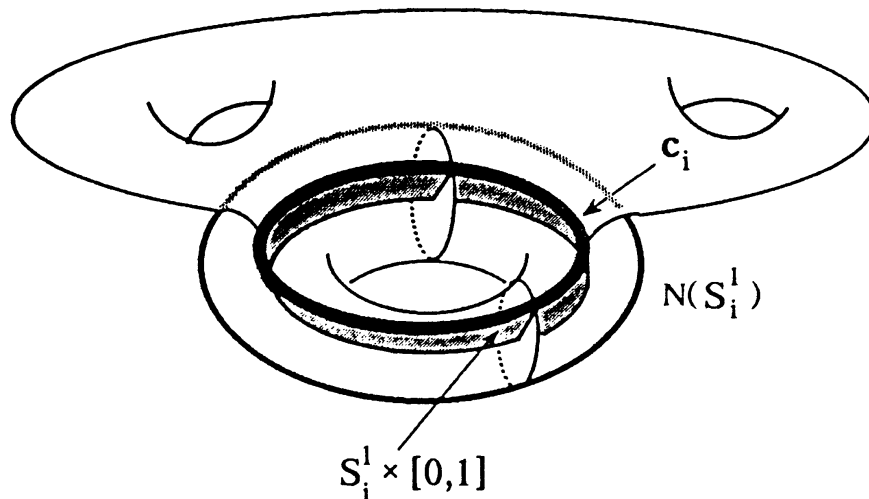


fig.20

Il cammino $c_i (\subset \partial M^3 - \text{int } N(S_i^1))$, che si può supporre disgiunto dal resto, è situato sulla frontiera dell'intorno tubolare di S_i^1 su cui è definito il parametro d'ordine $M^3 - \Sigma \xrightarrow{\Phi} V^3$. Ora poichè il cammino c_i è omologo "a zero" in $M^3 - \Sigma$, l'immagine $\Phi(c_i)$ sarà omologa "a zero" anche in V^3 , ma in V^3 il gruppo fondamentale $\pi_1 V^3$ è abeliano, per cui $\Phi(c_i)$ è anche omotopa "a zero". Allora possiamo eseguire la seguente costruzione astratta (cioè fuori dallo spazio fisico M^3). Si consideri la 3-varietà compatta $M^3 - \text{int } N(S_i^1)$. Indichiamo con $X_i = (M^3 - \text{int } N(S_i^1)) \cup \tilde{D}_i$ lo spazio ottenuto appoggiando un disco \tilde{D}_i sul cammino chiuso c_i . Si osservi che X_i (a priori) non è embedded in una 3-varietà, quindi è uno spazio astratto. Il parametro d'ordine Φ si estende su X_i perchè $\Phi(c_i)$ è omotopa "a zero" nel complementare di Σ . Operando la stessa costruzione su ciascuna componente del link, si ottengono, rispettivamente, gli spazi $X_1, X_{1,2},$ e $X_{1,\dots,n}$ su ciascuno dei quali il parametro d'ordine Φ si può estendere. Poniamo $Y = M^3 - \text{int } N(\Sigma)$. Su Y (che è una varietà) si appoggi (per ciascuna componente) un manico di indice 2 e dimensione 3: $D_i^2 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ ($i = 1, \dots, n$).

La frontiera di Y è, componente per componente, un toro tagliato lungo la curva c_i e su cui si incollano due dischi $D_i^2 \times \{-\varepsilon\}$ e $D_i^2 \times \{\varepsilon\}$ [3]. Il risultato di questa chirurgia è una sfera per ciascuna componente (n sfere in totale). Tappando tutti i buchi sferici otteniamo una varietà chiusa e senza frontiera $M_{\text{chirur}}^3 (\equiv N^3)$. Poichè $\pi_2 V^3 = 0$, in N^3 il parametro d'ordine Φ si può estendere [cf. Appendice]. Indicando con $\tilde{\Phi}$ l'estensione ($\tilde{\Phi} : N^3 \rightarrow V^3$) del parametro d'ordine, abbiamo, in conclusione, il seguente

TEOREMA 7. *Nello spazio fisico M^3 , supponiamo che l'insieme dei difetti Σ abbia il linking number nullo e che la varietà degli stati interni V^3 verifichi le condizioni a), b). Se il triplo prodotto di Sullivan di N^3 è non nullo e resta non nullo anche per $\tilde{\Phi}(N^3)$, allora alcun sistema fisico, che soddisfa le nostre condizioni, può distaccare il link (esempio: gli anelli di tipo Borromeo) anche se il gruppo fondamentale lo permette.*

Appendice.

Ad ogni parametro d'ordine, che comunemente si incontra nella teoria dello stato condensato, è possibile associare un gruppo (topologico) di

trasformazioni G che agisce transitivamente sulla varietà degli stati interni V . Sia H_Φ il sottogruppo di isotropia corrispondente ad un fissato valore del parametro d'ordine Φ . La varietà degli stati interni in genere si esprime in termini del gruppo G e del sottogruppo di isotropia H_Φ . Sottogruppi di isotropia corrispondenti a parametri d'ordine standard distinti, sono tra loro coniugati. La rottura di simmetria è espressa dal fatto algebrico che H_Φ è sottogruppo del gruppo G . Se la rottura di simmetria è completa, H_Φ si riduce al sottogruppo identico e tutte le trasformazioni di G portano a valori distinti del parametri d'ordine. La fase ordinata è espressa da un sottogruppo H_Φ non banale di G che descrive una simmetria della fase ordinata. Un gruppo G (senza sottogruppi propri) corrisponde alla "fase disordinata". La varietà degli stati interni V equivale topologicamente al quoziente G/H_Φ . È particolarmente utile sapere (soprattutto per sistemi complessi come l'elio 3 superfluido, cristalli liquidi nematici, smetici ecc.) se esiste una ostruzione all'estensione del parametro d'ordine Φ su Σ e quindi al rilassamento del mezzo verso una configurazione senza difetti. Mostriamo, nel teorema seguente, come i gruppi di omotopia della varietà degli stati interni determinano tali ostruzioni.

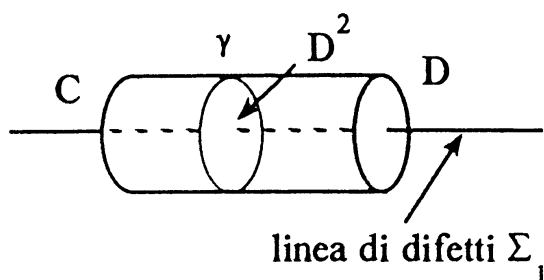
In un mezzo ordinato tridimensionale possono esistere pareti di difetti (2-dimensionali) classificati dal gruppo di omotopia $\pi_0(V)$, linee di difetti (1-dimensionali) classificati dal gruppo $\pi_1(V)$, punti di difetto (0-dimensionali) classificati dal gruppo $\pi_2(V)$.

TEOREMA [6]. *Lo spazio fisico M^3 sia una 3-varietà liscia, compatta, orientabile, connessa e denotiamo con V la varietà degli stati interni.*

In M^3 non vi è stabilità topologica

- a) per i punti di difetto se $\pi_2(V) = 0$,*
- b) per le linee di difetti se $\pi_1(V) = 0$,*
- c) per le pareti di difetti se $\pi_0(V) = 0$.*

Dimostrazione. Sia C un intorno tubolare della linea di difetti Σ_1

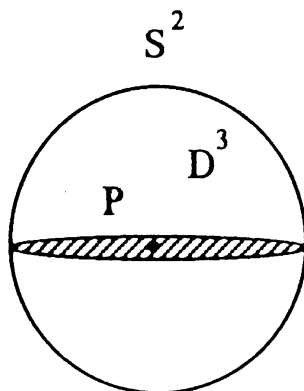


Il parametro d'ordine $M^3 - \Sigma_1 \xrightarrow{\Phi} V$ è pertanto definito su $D = \partial C$. Coticchè il parametro d'ordine Φ , che è definito sopra un cammino chiuso γ contenuto sulla frontiera dell'intorno tubolare C , dà luogo, a meno di una coniugazione, ad un'elemento del gruppo fondamentale $\pi_1(V)$. Ma poichè è $\pi_1(V) = 0$ il cammino chiuso $\Phi(\gamma)$ è omotopo (in V) all'applicazione costante. Sia D^2 il disco di cui γ è bordo.

Ora, in generale, se S^n è bordo del disco D^{n+1} ed X è uno spazio topologico, si sa che un'applicazione continua $f : S^n \rightarrow X$ è omotopa ad un'applicazione costante se e solo se è possibile estendere f ad un'applicazione $F : D^{n+1} \rightarrow X$, ove $F|_{S^n} = f$.

Allora il parametro d'ordine Φ può essere esteso, in maniera continua, sopra il disco D^2 . Ciò significa, data l'arbitrarietà del cammino γ , che la linea di difetti Σ_1 non può essere topologicamente stabile.

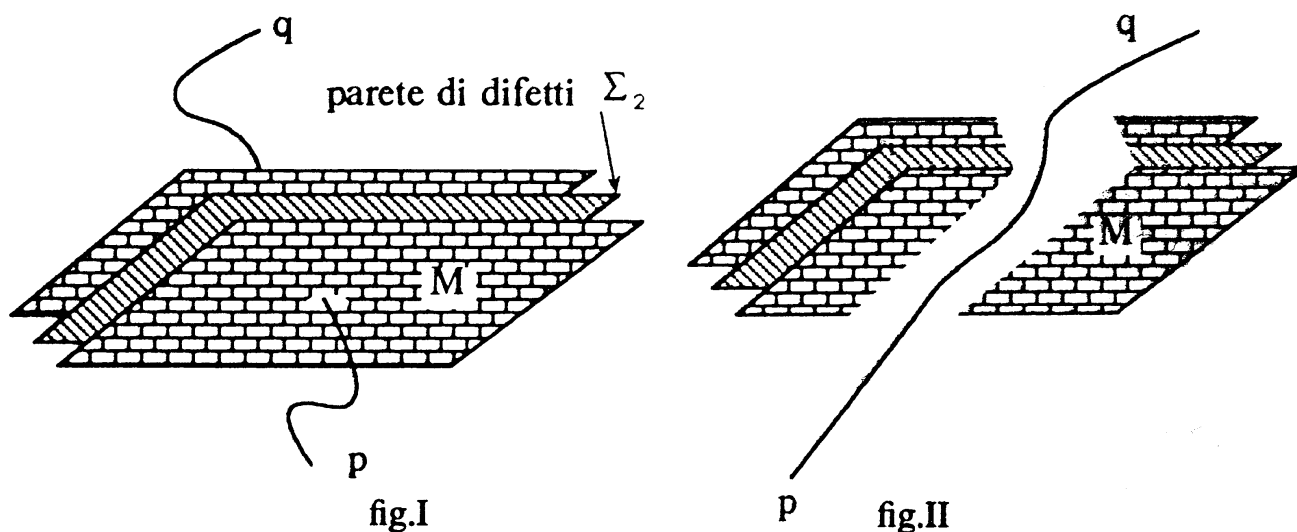
Sia ora P un punto di difetto del mezzo ordinato, e si consideri un disco 3-dimensionale D^3 di centro il P



Sulla frontiera S^2 del disco D^3 è definito il parametro d'ordine $\Phi : S^2 \rightarrow V$ e il fatto che $\pi_2(V) = 0$, significa che $\Phi(S^2)$ è omotopo all'applicazione costante. Allora, come prima, Φ si può estendere su tutto D^3 e in particolare in P , per cui se $\pi_2(V) = 0$ non vi possono essere in

M^3 punti topologicamente stabili.

Per provare infine la c) sostituiamo la parete di difetti S^2 con un muro tridimensionale. Ora il fatto che $\pi_0(V) = 0$ significa che lo spazio V è anche connesso per archi. In particolare con un cammino si può raggiungere un punto p che si trova dall'altra parte del muro partendo da un punto q che si trova da questa parte del muro. Su tale cammino il parametro d'ordine Φ è definito



In fig.I il cammino attraversa il muro, in fig.II per continuità, il muro interno scompare. Dunque se $\pi_0(V) = 0$ non vi sono in M^3 pareti di difetto topologicamente stabili.

Le fasi ordinate ammettono un gran numero di ordini possibili: magnetici, ferroelettrici, superfluidi, superconduttori, cristalli liquidi ecc. facciamo qualche esempio

1. Spins planari.

Il parametro d'ordine è un vettore (convenzionalmente) unitario posto sopra un piano.

Il gruppo G è una rotazione (propria) 2-dimensionale $SO(2)$. Ma nessuna trasformazione, eccetto l'identità, lascia un vettore fisso. Allora H_Φ è il sottogruppo identico di $SO(2)$. Quindi lo spazio del parametro d'ordine (spins planari) è $SO(2)$ rappresentabile topologicamente da una circonferenza S^1 . D'altra parte sappiamo che $\pi_1(S^1) \approx \mathbb{Z}$ quindi in mezzi ordinati di questo tipo, i difetti puntuali sono caratterizzati da interi che, se sono non nulli, danno luogo a difetti stabili.

2. Spins ordinari.

Il parametro d'ordine è un vettore unitario dello spazio euclideo 3-dimensionale, il gruppo G è il gruppo $SO(3)$ delle rotazioni proprie. Se il parametro d'ordine standard è un vettore unitario situato sull'asse z , il sottogruppo di isotropia di G è dato dalle rotazioni 2-dimensionali $SO(2)$ attorno all'asse z . La varietà degli stati interni è ora $V = SO(3)/SO(2)$ e può essere topologicamente rappresentata dalla sfera S^2 . Ora ricordiamo alcuni fatti. Siano G un gruppo di Lie compatto con $\pi_0(G) \approx \pi_1(G) \approx 0$ (cioè connesso e semplicemente connesso), H un sottogruppo chiuso di G , ed $H_0 \subset H$ la componente connessa dell'unità (sottogruppo normale). Dalla successione esatta

$$\dots \pi_n(G) \rightarrow \pi_n(G/H) \rightarrow \pi_{n-1}(H) \rightarrow \pi_{n-1}(G) \rightarrow \dots$$

e dalla $\pi_0(H) \approx H/H_0$ si ha l'isomorfismo $\alpha : \pi_1(G/H) \rightarrow H/H_0$. Ma il gruppo G è compatto, allora per il teorema di Cartan è anche $\pi_2(G) \approx 0$ così dalla successione esatta si ha un'altro isomorfismo $\beta : \pi_2(G/H) \rightarrow \pi_1(H_0)$. Ora nel caso in esame il gruppo $SO(3)$ non è connesso, allora dobbiamo ricorrere al suo rivestimento universale $SU(2)$. Il sottogruppo di isotropia di $SU(2)$ che lascia fisso l'asse z sono le matrici 2×2 di $SU(2)$ del tipo.

$$u(z, \theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}.$$

Questo sottogruppo è connesso e coincide con la componente connessa dell'identità, il sottogruppo H/H_0 è quindi banale. Allora $\pi_1(V) \approx 0$ e per l'isomorfismo β è $\pi_2(V) \approx Z$. Così i mezzi ordinati di tipo spins ordinari, non possiedono linee di difetti stabili ma hanno punti di difetto classificati da interi positivi o negativi. Per spins ordinari n -dimensionali e di ampiezza costante, la varietà degli stati interni è $V = S^{n-1}$. Ora si sa che $\pi_r(S^m) \approx 0$ se $r < m$, $\pi_m(S^m) \approx Z$. Allora i difetti topologicamente stabili avranno dimensione $d' = d - n$. Per $n > d$, non vi sono difetti stabili, per $0 < n < d$ otteniamo difetti stabili (se $n = d$ punti, se $n = d - 1$ linee, se $n = d - 2$ muro di difetti, ecc...), per $n < 0$ alcun tipo di difetto è topologicamente stabile.

3. *Cristalli liquidi nematici.*

Nematici sono quei mezzi ordinati nei quali il parametro d'ordine è un vettore unitario dello spazio euclideo 3-dimensionale, come nell'esempio 2, ma senza un verso. Il parametro d'ordine fornisce la direzione media comune di un mezzo costituito da molecole a simmetria di un ellissoide di rotazione. I centri di gravità sono distribuiti a caso. Ruotando una molecola di 180° attorno ad un asse ortogonale ad un'asse di simmetria, la molecola assume una configurazione indistinguibile da quella iniziale. Lo spazio del parametro d'ordine è la superficie di una 2-sfera S^2 in cui i punti diametralmente opposti sono identificati. Il gruppo G è $SO(3)$ e il sottogruppo di isotropia è il sottogruppo D^∞ delle rotazioni attorno all'asse (principale) della molecola e le rotazioni di 180° attorno agli assi ortogonali all'asse principale della molecola. Allora $V = S^2/Z_2$ (in cui $Z_2 = Z/2Z$) è una sfera con i punti diametralmente opposti identificati quindi è, topologicamente, il piano proiettivo RP^2 . Ora si sa che $\pi_0(S^2) \approx \pi_1(S^2) \approx 0$ e $\pi_2(S^2) \approx \pi_3(S^2) \approx Z$ e che la successione

$$\begin{aligned} \pi_2(Z_2) \rightarrow \pi_2(S^2) \rightarrow \pi_2(S^2/Z_2) \rightarrow \pi_1(Z_2) \rightarrow \\ \rightarrow \pi_1(S^2) \rightarrow \pi_1(S^2/Z_2) \rightarrow \pi_0(Z_2) \rightarrow \pi_0(S^2) \end{aligned}$$

è esatta. Allora $\pi_1(V) \approx Z_2, \pi_2(V) \approx \pi_3(V) \approx Z$. Dunque nei mezzi nematici convivono punti e linee di difetti. Abbiamo visto che $\pi_1(V) \approx Z$, il cappio (fig.21) (disinclinazione di 180°)

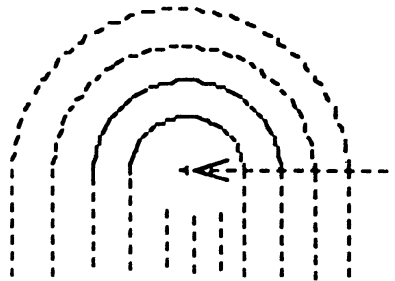


fig.21

è un generatore nello spazio delle direzioni di questo gruppo. Già da queste semplici considerazioni topologiche si giunge al seguente fatto: i difetti lineari hanno la proprietà di essere loro stessi antidifetti, nel senso che due

difetti identici si possono cancellare per sovrapposizione. Ricordiamo che l'azione $\tau : \pi_1(G/H) \times \pi_2(G/H) \rightarrow \pi_2(G/H)$ è data, dagli isomorfismi α e β , dall'automorfismo interno di $H : \tau(x, y) = \alpha(x)^*(\beta(y))$, ove $x \in \pi_1(G/H)$ ed $y \in \pi_2(G/H)$. Per cui l'azione di $\pi_1(V)$ su $\pi_2(V)$ è non banale, i punti di difetto corrispondenti sono tra loro topologicamente equivalenti. I punti di difetto stabili corrispondono a coppie di elementi in $\pi_2(V)$ associati a numeri interi di segno opposto. Un punto di difetto caratterizzato da un numero n può essere mutato in un altro caratterizzato da $-n$ (rispetto ad un punto base) e ciò si ottiene congiungendo i due punti con un cammino chiuso attorno una linea di disinclinazione di 180° . Da due punti con singularità rispettive $|n_1|$ e $|n_2|$ si può passare ad uno con singularità $||n_1| - |n_2||$ o una singularità $|n_1 + n_2|$ a secondo che il cammino che li congiunge circonda o no una linea di disinclinazione. Per un cristallo liquido nematico con esattamente $2n$ punti di difetto, congiungendo punti tipo n secondo cammini che circondano la linea di difetti, essi si mutano in punti di tipo $-n$ (rispetto ad un punto base fissato) e quindi per ricombinazione i difetti si possono cancellare. Se la somma è dispari, con analoghe trasformazioni e ricombinazioni, si può ridurre l'insieme dei punti di difetto ad un solo difetto il cui indice uguaglia la somma degli indici di ciascuno.

4. Cristalli liquidi nematici biassici.

I nematici biassici sono simili ai nematici dell'esempio 3 in cui la simmetria molecolare è ridotta a quella di una scatola a simmetria rettangolare. Le diverse configurazioni differiscono solo per una rotazione di 180° attorno ciascuno dei tre assi ortogonali di simmetria. Il gruppo G è $SO(3)$, il sottogruppo di isotropia (D_2) ha quattro elementi: l'identità e le tre rotazioni di 180° attorno ai tre assi mutuamente ortogonali. Lo spazio del parametro d'ordine è $V = SO(3)/D_2$. Rialzando il sottogruppo D_2 in $SU(2)$ otteniamo il gruppo Q dei quaternioni, così un'altra rappresentazione dello spazio del parametro d'ordine è $V = SU(2)/Q$. Ma Q è un sottogruppo discreto di $SU(2)$ allora, per l'isomorfismo α , si ha che $\pi_1(V) = Q$ (gruppo non commutativo) e per l'isomorfismo β , $\pi_2(V) \approx 0$. Nei cristalli liquidi biassici vi sono solo linee di difetti (classificate solo dalle loro classi di coniugazione) topologicamente stabili.

5. Cristalli solidi.

La varietà degli stati interni è $V = S^1 \times S^1 \times S^1$ (toro 3-dimensionale) per cui $\pi_1(V) = Z + Z + Z$ mentre tutti i $\pi_i(V)$ sono nulli. Dunque $\pi_1(V)$ è isomorfo alle traslazioni intere in \mathbb{R}^3 ed esistono solo linee di difetti, che si possono pensare come vettori di un reticolo di *Bravais* caratterizzato da un vettore detto di Burgers.

6. Cristalli liquidi smetici.

Una fase di simmetria intermedia tra la simmetria dei cristalli liquidi e quella dei cristalli solidi, è detta fase smetica. I difetti negli smetici mostrano peculiari differenze presentando simmetrie intermedie tra i cristalli liquidi nematici e i cristalli solidi; essi si dispongono in strati di spessore che resta costante anche in caso di forti deformazioni.

In [11 bis] si presenta uno schema in cui le foliazioni misurate costituiscono un primo schema matematico dei cristalli smetici.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BOULIGAND Y., *Recherches sur les textures des états mésomorphes. 6-Dislocations coins et signification des cloisons de Grandjean-Cano dans les cholestériques*, Jour. de Phys. tome 35 (1974).
- [2] BOULIGAND Y., DERRIDA B., POÉNARU V., POMEAU Y. e TOULOUSE G., *Distorsions with double topological character: the case of cholesterics*, Le J. de Physique tome 39 (1978).
- [3] DOUBOVINE B., NOVIKOV S. e FOMENCO A., *Géométrie contemporaine méthodes et Applications 3a partie*, ed. MIR (1987).
- [4] KIRBY R., *Topology of 4-manifolds*, Lecture Notes in Mathematics 1375.
- [5] KLÉMAN M., MICHEL L. e TOULOUSE G., *Classification of Topologically Stable Defects in ordered media* J. Physique Lett. 38 (1977) L-195.
- [6] KLÉMAN M. e TOULOUSE G., *Principles of a Classification of defects in ordered media*, J. Physique Lett. 37 (1976) L-149.
- [7] MINEEV V.P. e VOLOVIC G.E., *Line and point singularities in superfluid ^3He* , Pis'ma Zh. Exsp. Teor. Fiz. 24, 605-608 (1976) [JETP Lett. 24, 561-563 [1976]].
- [8] MINEEV V.P. e VOLOVIC G.E., *Investigation of singularities in superfluid ^3He in liquid crystals by homotopic topology methods*, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz., 72, 2256-2274 (1977) [Sov. Phys. JETP 45, 1186-1195 [1977]].
- [9] ROLFSEN D., *Knots and links*, Math. lect. series 7, Publish or Perish Inc. (1976).
- [10] ROHLIN V.A., *A three dimensional manifold is the boundary of four-dimension one*, Doklady Akad. nauk SCSSR (N.S.) 81, 355-357 (1951).

- [11] POÉNARU V., *Lectures on the singularities of C^∞ mappings* C.I.M.E. 1975.
- [11 bis] POÉNARU V., *Some aspects of the theory of defects of ordered media and gauge fields related to foliations*, Commun. Math. Phys. 80 (1981).
- [12] POÉNARU V. e TANASI C., *Introduzione alla Geometria e alla Topologia dei Campi di Yang-Mills*, Suppl. Rend. del Circ. Mat. di Palermo, serie II, N. 13 (1986).
- [13] POÉNARU V. e TOULOUSE G., *The crossing of defects in ordered media, and the topology of 3-manifolds*, J. Phys. 887, 887-895 (1977).
- [14] POÉNARU V. e TOULOUSE G., *Topological solitons and graded Lie algebras*, J. Math. Phys. 20 (19) Jan. 1979.
- [15] SULLIVAN D., *On the intersection ring of compact three manifolds*, Topol. vol. 14 (1975).
- [16] TANASI C., *Cohomology in the theory of defects in ordered media*, (7) 4-B UMI (1990).