SULL'INVARIANZA DELLA COMPLETA REGOLARITÀ E DELLA METRIZZABILITÀ (*)

di F. CAMMAROTO e C. IELO (a Messina) (**)

SOMMARIO. - *Diamo delle dimostrazioni alternative ai teoremi di Chaber e Balachandran rispettivamente per suriezioni continue aperte e chiuse e suriezioni continue a fibre finite aperte e chiuse.*

SUMMARY. - *Alternate proofs of Chaber's and Balachandran's results respectively for clopen continuous surjection and clopen fibers finite continuous surjection are given.*

A.M.S. Subject Classification (1980): 54E30, 54E35, 54E25.

Introduzione.

Sia $f : X \to Y$ una suriezione continua. Un problema che ha interessato per molti anni i topologi, soprattutto dopo la pubblicazione dell'articolo di Alexandroff [1] del 1961 è stato quello di studiare l'invarianza diretta ed inversa di proprietà topologiche quando f appartiene a certe classi di funzioni. Le funzioni che comunemente vengono studiate sono quelle aperte, chiuse, perfette e a fibre finite.

Le proprietà topologiche considerate includono gli assiomi di separazione, la metrizzabilità, la compattezza e relative generalizzazioni.

In tale ambito, nel 1955 Balachandran [2] provò un interessante risultato sull'invarianza della metrizzabilità mediante suriezioni continue aperte e chiuse.

(*) Pervenuto in Redazione il 26 febbraio 1990.
Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.) e dei fondi 40% M.U.R.S.T.
(**) Indirizzo degli Autori: Dipartimento di Matematica – Università degli Studi di Messina – Contrada Papardo, Salita Sperone, 31 – 98166 Sant'Agata (ME) (Italy).

Nel 1972 Chaber [8] provò l'invarianza della completa regoralità mediante suriezioni continue aperte e chiuse.

Recentemente, il primo autore e Naimpally [6], hanno provato l'invarianza della sviluppabilità e della *D-completa regolarità* mediante una nuova classe di funzioni (giacente tra le continue e le perfette) le *debolmente prossimali* ed aperte.

In questo lavoro, facendo uso delle techniche usate da Balachandran [2], diamo una dimostrazione alternativa al risultato di Chaber [8] relativo all'invarianza della completa regolarità.

Successivamente, facendo uso della condizione di metrizzabilità di Bing [3] e dei risultati del Gruenhage [12] relativi alle principali generalizzazioni della metrizzabilità, riconduciamo lo studio dell'invarianza della metrizzabilità a quella di ognuna delle "componenti" in cui essa si spezza (ad esempio: Uno spazio X è metrizzabile se e soltanto se è paracompatto, $w\Delta$ -spazio con G_δ -diagonale).

Ciò permette di riottenere il teorema di Balachandran, anche se per una sottoclasse di funzioni continue aperte e chiuse (quelle a fibre finite), in modo nuovo ed elegante.

Indichiamo nel seguito con (S,τ) uno spazio topologico di supporto S e topologia τ.

Se Y è un insieme, diciamo che una famiglia $\mathcal{D} = \{d_\alpha/\alpha \in \mathcal{A}\}$ di pseudometriche su Y è *separante* se per ogni coppia di punti $x \neq y$ esiste un $d_\alpha \in \mathcal{D}$ tale che $d_\alpha(x,y) \neq 0$.

Se Y è un insieme e $\mathcal{D} = \{d_\alpha/\alpha \in \mathcal{A}\}$ una famiglia separante di pseudometriche su Y, la topologia $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ che ha per sottobase la famiglia $\mathcal{B}(\mathcal{D}) = \{B(y,d_\alpha,\varepsilon)/y \in Y, d_\alpha \in \mathcal{D}, \varepsilon > 0\}$ di sfere la diciamo topologia in Y indotta dalla famiglia $\mathcal{D}$. Con $\mathcal{D}^+$ indichiamo la famiglia di pseudometriche $\{\max(d_{\alpha_1},\ldots,d_{\alpha_n})/\forall\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} \subset \mathcal{A}\}$; e con $d^+ = \max(d_{\alpha_1},\ldots,d_{\alpha_n})$. Per le definizioni delle principali generalizzazioni degli spazi metrizzabili rimandiamo al Gruenhage [12].

1. Dimostrazione alternativa al Teorema di Chaber.

In questo paragrafo diamo una dimostrazione alternativa al teorema di Chaber via Balachandran. A tal fine premettiamo:

– Sia $f\,:\,(S,\tau) \to (S^*,\tau^*)$ una funzione continua di uno spazio T_1

metrizzabile alla sua immagine T_1, (S^*, τ^*). Sia d la metrica su (S, τ) tale che $T_\alpha = \tau$. Sia $2^S = \{X \subset S/X$ sia chiuso di $S\}$ l'iperspazio di S dotato della metrica di Hausdorff d_H cosi definita:

$$d_H(X,Y) = \max\{\sup_{x\in X} \rho(x,Y), \sup_{y\in Y} \rho(X,y)\}$$

$$\text{ove} \quad \rho(x,Y) = \inf_{y\in Y} d(x,y) \quad \text{e} \quad \rho(X,y) = \inf_{x\in X} d(x,y) \; .$$

Considerato per ogni $y^* \in S^*$ la fibra $f^{-1}(y^*) \subseteq S$, poichè f è continua ed S^* è T_1 $f^{-1}(y^*) \in 2^S$, la famiglia $F = \{f^{-1}(y^*)/y^* \in S^*\} \subseteq 2^s$. Ne segue allora che F è uno spazio metrico con la metrica di Hausdorff e pertanto alla metrica d su (S, τ) resta associata in modo naturale una metrica d^* su (S^*, τ^*) che indichiamo con $f(d) = d^*$ cosi definita: $\forall x^*, y^* \in S^*$ $d^*(x^*, y^*) = d_H(f^{-1}(x^*), f^{-1}(y^*))$.

LEMMA 1.1. *Nelle condizioni precedenti, fissato un punto* $x_0 \in S$ *per ogni* $y \in S$ *tale che* $d(x_0, y) < \varepsilon$ *risulta:* $fd(f(x_0), f(y)) = d^*(f(x_0), f(y)) < \varepsilon$.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $f(x_0) = x_0^*$ e $f(y) = y^*$. Proviamo che $d^*(x_0^*, y^*) \leq \varepsilon$. Dalla definizione precedente è $d^*(x_0^*, y^*) = d_H(f^{-1}(x_0^*), f^{-1}(y^*))$. Posto $X_0 = f^{-1}(x_0^*)$ ed $Y = f^{-1}(y^*)$ risulta che $d^*(x_0^*, y^*) = d_H(X_0, Y)$, dimostreremo quindi che

$$\max\{\sup_{x\in X_0} \rho(x,Y), \sup_{y\in Y} \rho(X_0,y)\} \leq \varepsilon \; .$$

Per provare ciò deve essere:
$\rho(x,Y) \leq \varepsilon$ per ogni $x \in X_0$ e $\rho(X_0, y) \leq \varepsilon$ per ogni $y \in Y$.

Basta verificarlo solo per uno. Consideriamo $Y = f^{-1}(y^*)$, si possono presentare due casi:

1) tutti gli altri $y_i \in Y$ hanno $d(x_0, y_i) \leq \varepsilon$, cioè $Y \subseteq \bar{B}(x_0, d, \varepsilon) = \{y \in S/d(x_0, y) \leq \varepsilon\}$, ne segue allora che anche $\rho(x, Y) \leq \varepsilon$.
2) Esistono alcuni $y_i \in Y$ tali che $d(x, y_i) > \varepsilon$ cioè $Y \cap (S - \bar{B}(x_0, d, \varepsilon)) \neq 0$ allora anche in questo caso è $\rho(x, Y) \leq \varepsilon$. In entrambi si ha l'asserto.

LEMMA 1.2. *Sia (S,τ) uno spazio topologico T_1 e $\mathcal{D}$ una famiglia di pseudometriche separanti e generanti la topologia τ. Se $d^+ \in \mathcal{D}^+$, f ed $fd^+ = d^{+*}$ sono la funzione e la pseudometrica mediante f di cui al lemma 1.1, $\forall x \in S$ e per ogni $B(x, d^{+*}, \varepsilon)$ risulta che $f(B) = B(f(x), d^{+*}, \varepsilon)$.*

DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare l'uguaglianza, proviamo che vale la doppia inclusione. Per definizione, la sfera

$$B(x; d^+, \varepsilon) = \{z \in S/d^+(x,z) < \varepsilon\} \tag{1}$$

e $d^+ = \max(d_{\alpha_1}, \dots, d_{\alpha_n})$.

Per dimostrare che $f(B) \subseteq B(f(x), d^{+*}, \varepsilon)$, osserviamo che

(1) $f[B(x, d^+, \varepsilon)] = f\{z \in S/d^+(x,z) < \varepsilon\}$.

(2) $f(B) = \{z^* \in S^* : \exists z \in B/f(z) = z^*\}$.

Sia $z^* \in f(B)$, $\exists z \in B$ tale che $f(z) = z^*$. Per come è definita la sfera B, $d^+(x,z) < \varepsilon$, applicando la funzione $f[d^+(x,z)] = d^{+*}(y^*, z^*) < \varepsilon$, per il lemma 1.1 quindi $z^* \in B(y^*, d^{+*}, \varepsilon)$.

Per provare che $f(B) \supseteq B(y^*, d^{+*}, \varepsilon)$, ragioniamo per assurdo, supponendo che $f(B) \not\supseteq B(y^*, d^{+*}, \varepsilon)$. Allora $\exists z^* \in B(y^*, d^{+*}, \varepsilon)$ tale che $z^* \notin f(B)$. Quindi $\nexists\, z \in B$ tale che $f(z) = z^*$, ciò implica che $d^+(x,z) \geq \varepsilon$.

Applicando la funzione $fd^+(x,z) \geq \varepsilon$ è dunque $d^{+*}(y^*, z^*) \geq \varepsilon$. Questo implica che $z^* \notin B(y^*, d^{+*}, \varepsilon)$, il che è assurdo.

TEOREMA 1.3 (Chaber). *Se uno spazio S^* è l'immagine di uno spazio S completamente regolare mediante una funzione f continua aperta e chiusa, allora S^* è completamente regolare.*

DIMOSTRAZIONE. Lo spazio S è T_1 e poichè f è chiusa S^* sarà T_1, quindi basta solo provare che S^* e T_{3a}.

Sia (S,τ) completamente regolare, esiste una famiglia di pseudometriche $\mathcal{D} = \{d_i/i \in I\}$ separante e generante τ (teor. 106 di [9]).

Usando la tecnica di Balachandran possiamo associare a $\mathcal{D}$ una famiglia di pseudometriche separante e generante σ in S^*.

Allora diamo le seguenti definizioni.

Sia d^* la metrica associata a d, così definita: $d^*(x^*, y^*) = d(X, Y)$ con $X = f^{-1}(x^*)$ ed $Y = f^{-1}(y^*)$ e $d(X,Y) = \max\{\sup_{x\in X} \rho(x, Y), \sup_{y\in Y} \rho(X, y)\}$. Questo si può fare per ogni d_i, per cui abbiamo una famiglia di pseudometriche su Y $\mathcal{D}^* = \{d_i^*/i \in I\}$.

Resta da dimostrare che $\mathcal{D}^*$ è separante e generante la topologia σ. Proviamo che è separante. Se non lo fosse esisterebbero due punti distinti di S^*, siano essi x^* ed y^* tali che per ogni $i \in I$ $d_i^*(x^*, y^*) = 0$. Se $X = f^{-1}(x^*)$ e $Y = f^{-1}(y^*)$, che sono due chiusi disgiunti di S, risulta

$$d_i^*(x^*, y^*) = d_{i_H}(X, Y) = 0. \tag{1}$$

Per definizione, è

$$d_{i_H}(X,Y) = \max\{\sup_{x\in X} \rho_i(x, Y),\ \sup_{y\in Y} \rho_i(X, y)\},$$

pertanto dalla (1) segue che

$$\sup_{x\in X} \rho_i(x, Y) = \sup_{y\in Y} \rho_i(X, y) = 0$$

e quindi anche

$$\rho_i(x, Y) = \rho_i(X, y) = 0 \quad \forall x \in X \quad \text{e} \quad \forall y \in Y.$$

Fissiamo l'attenzione su $\rho_i(x, Y) = 0$, ciò implica che $x \in \bar{Y} = Y$. Questa è una contraddizione essendo $X \cap Y = \emptyset$. Analoga contraddizione si ottiene considerando $\rho_i(X, y) = 0$. Ne segue allora che $d_i^*(x^*, y^*) \neq 0$ e quindi $\mathcal{D}^*$ è separante.

Proviamo ora che $\mathcal{D}^*$ genera σ. Costruiamo $\mathcal{D}^* = \{d_\alpha^{+*}\}$, dove $d_\alpha^{+*} = \max\{d_{\alpha_1}^*, \ldots, d_{\alpha_n}^*\}$. Sia $y^* \in U \in \sigma$ e sia $Y = f^{-1}(y^*)$, risulta che $Y \subseteq f^{-1}(U)$. Consideriamo $x \in f^{-1}(y^*)$, poichè lo spazio S è completamente regolare esiste la famiglia $\mathcal{D}$ di pseudometriche separanti generanti τ; per cui in $\mathcal{D}^+ \exists d^+$ tale che

$$B(x; d^+, \varepsilon) \subseteq f^{-1}(U) \tag{3}$$

Dove la $B(x; d^+, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} B(x; d_{\alpha_i}, \varepsilon)$. Applicando la f ad ambo i membri della (3) risulta: $f[B(x; d^+, \varepsilon) \subseteq ff^{-1}(U) \subseteq U$. Ma per il lemma 1.2

risulta che $f[B(x; d^+, \varepsilon)] = B(y^*; d^{+*}, \varepsilon)$, quindi ne segue che $B(y^*, d^{+*}, \varepsilon) \subseteq U$ ciò dimostra che σ è generata da $\mathcal{D}^{+*}$ e quindi Y è completamente regolare.

2. Dimostrazioni alternative al teorema di Balachandran per funzioni a fibre finite.

Nel 1955 Balachandran dimostrò che: "Se (X, d) è uno spazio metrizzabile e se $f : X \to Y$ è una funzione continua aperta e chiusa di X in uno spazio Y che è T_1, allora Y è metrizzabile".

In questo paragrafo presentiamo alcune dimostrazioni relative alla invarianza della metrizzabilità, significative per la tecnica e gli strumenti usati. È noto che:

"Uno spazio X è metrizzabile se e soltanto se X è di Moore e collettivamente normale". (Bing 1951).

Prendendo spunto dal suddetto teorema e seguendo il Gruenhage [12], usiamo le principali generalizzazioni della metrizzabilità al fine di presentare quest'ultima come somma di due di esse. Perveniamo perciò al seguente:

TEOREMA 2.1. *Se X è uno spazio topologico, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) X è metrizzabile,

(b) X è paracompatto, $w\Delta$-spazio con G_δ-diagonale,

(c) X è σ-spazio ed M-spazio,

(d) X è di Moore e collettivamente normale,

(e) X è un M-spazio con G_δ-diagonale.

(f) X è stratificabile e $w\Delta$ spazio oppure p spazio.

Pertanto l'invarianza della metrizzabilità si riconduce a quella di ognuna delle due "componenti" in cui essa si spezza.

Al fine di presentare il teorema conclusivo ricordiamo alcuni risultati relativi all'invarianza delle forme deboli di metrizzabilità di cui al teorema

2.1. secondo *funzioni aperte* a *fibra finita* (1) e *chiusa.*

TEOREMA 2.2. *Sia $f : X \to Y$ una suriezione continua, aperta e a fibre finite, se X è un $w\Delta$-spazio, Moore-spazio oppure G_δ-spazio, allora se Y è T_1, Y è dello stesso tipo.*

DIMOSTRAZIONE. Si veda la tabella 1, pag. 158 [11].

OSSERVAZIONE 1. Circa gli M-spazi e i p-spazi, di cui allo schema precedente, in [11] è detto che in generale non sono invarianti per funzioni aperte e a fibre finite.

TEOREMA 2.3. *Sia $f : X \to Y$ una suriezione continua e chiusa, se X è paracompatto, σ-spazio, collettivamente normale oppure stratificabile, allora se Y è T_1, Y è dello stesso tipo.*

DIMOSTRAZIONE. Si vedano tabella 1, tabella 2 e tabella 3 di [5].
Diamo ora il teorema conclusivo:

TEOREMA 2.4. *Sia $f : X \to Y$ una suriezione continua, chiusa, a fibre finite e aperta, se X è metrizzabile ed Y è T_1, allora Y è metrizzabile.*

DIMOSTRAZIONE. Per la (b) del teorema 2.1 X è paracompatto e $w\Delta$-spazio con G_δ-diagonale: quindi per i teoremi 2.3 e 2.2 ne segue che Y è paracompatto e $w\Delta$-spazio con G_δ-diagonale per cui l'asserto.

Per la (d) del teorema 2.1 X è Moore e collettivamente normale: quindi per i teoremi 2.2 e 2.3 ne segue che Y è Moore e collettivamente normale quindi l'asserto. Per la (f) del teorema 2.1 X è stratificabile e $w\Delta$-spazio: quindi per i teoremi 2.3 e 2.2 ne segue che Y è stratificabile e $w\Delta$-spazio onde Y è metrizzabile.

OSSERVAZIONE 2. Poichè ogni funzione continua chiusa a fibre fi-

(1) Diciamo che una funzione $f : X \to Y$ è fibra finita quando per ogni $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ è un sottoinsieme finito di X.

nite è perfetta, il teorema precedente potrebbe essere dedotto direttamente dal noto risultato di Morita ([10], teor. 4.4.15). Ci sembra tuttavia utile presentarlo per il fatto che la dimostrazione data è alternativa, per la classe di funzioni continue a fibre finite, alla non semplice dimostrazione data da Balachandran [2].

OSSERVAZIONE 3. Osserviamo che le caratterizzazioni (c), (e), (f) del teorema 2.1 (relativamente ai p-spazi) pur essendo significative per la metrizzabilità, non possono essere usate per il teorema precedente in quanto, come detto nell'osservazione 1, l'essere M-spazio o p-spazio non è invariante per funzioni aperte a fibre finite.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALEXANDROFF P.S., *On some results concerning topological mappings*, Proc. Symp. Prague (1961), 41-45.

[2] BALACHANDRAN V.K., *A mapping theorem for metric spaces*, Duke J. Math. *22* (1965), 461-464.

[3] BING R.H., *Metrization of topological spaces*, Can. J. Math. *3* (1951), 175-186.

[4] BRANDENBURG H., *Separation Axioms, covering properties and inverse limits generated by developable topological spaces*, Fachbereich Matematik der Frein Universität Berlin (1986).

[5] BURKE D.K., *Closed Mapping*, Survey in General Topology, Acc. Press (1980), 1-31.

[6] CAMMAROTO F. e NAIMPALLY S.A., *Preservation of developability and D-complete regularity* (submitted).

[7] CAMMAROTO F., *On D-completely regular spaces*, Atti IV Conv. Naz. di Top. (1988) Supp. Rend. Cir. Mat. di Palermo.

[8] CHABER J., *Remarks on open-closed mappings*, Fund. Math. *74* (1972), 197-208.

[9] DUGUNDJI J., *Topology*, Allyn and Bacon Inc. (Boston 1978).

[10] ENGELKING R., *General Topology*, Monografie Mathematyezne vol. *60*, Polish Scientific Publ. Warsaw (1977).

[11] GUTTINGS R.F., *Open mapping*, Theory, set-theoretic topology, Acc. Press (1977), 141-191.

[12] GRUENHAGE G., *Generalized metric spaces*, in Handbook of set-theoretic topology, Ed. by K. Kunen and J.E. Vonghan (North-Holland, Amsterdam, 1984), 423-501.

[13] MICHAEL E., *Topologies on Spaces of Subsets*, Trans. Armer. Math. Soc. *71* (1951), 152-182.

[14] MOORE R.L., *Foundations of point set theory*, (Providence, 1962).