IRRAZIONALI QUADRATICI E FUNZIONI DI KOENIGS (*)

di RODOLFO TALAMO (a Potenza) (**)

SOMMARIO. - *Lo scopo della presente nota è di far vedere che "quasi tutte" le funzioni di Koenigs sono approssimabili uniformemente mediante funzioni di Koenigs quadratiche. Mostriamo inoltre con un esempio che i parametri quadratici necessari per tale approssimazione vanno scelti opportunamente*

SUMMARY. - *The purpose of this note is to show that "almost all" Koenigs functions can be uniformly approximated through quadratic Koenigs functions. Moreover we exhibit an example, in which it is proved that the parameters that suit to this approximation have to be carefully chosen*

Sia $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \lambda,\ a_i \in \mathbf{C}, |\lambda| = 1$ una funzione di variabile complessa, analitica in un intorno del proprio punto fisso 0. Il problema del coniugio di f alla sua parte lineare, cioè della sua riduzione ad una rotazione di ampiezza λ in un conveniente intorno di 0, equivale com'è noto all'esistenza di una soluzione analitica dell'equazione funzionale di Schröder (abb. SFE) $\phi(\lambda z) = f(\phi(z))$, dove ϕ è la funzione di coniugio incognita, detta funzione di Koenigs. Se imponiamo a f la condizione di essere analitica su tutta la sfera di Riemann $\mathbf{C}$, cioè in definitiva razionale, il fatto suddetto ha la seguente interpretazione topologica. È noto che $\mathbf{C}$ ammette la partizione nei due sottinsiemi invarianti $J(f)$ e $F(f)$, rispettivamente di Julia e di Fatou [4], di cui il primo è a dinamica caotica mentre il secondo è costituito da orbite Lyapunov-stabili. Nelle nostre ipotesi, cioè $f(0) = 0$ e $|f'(0)| = 1$, la risolubilità delle SFE equivale all'appartenenza di 0 a $F(f)$. In tal caso l'origine è naturalmente un punto di equilibrio stabile secondo Lyapunov del sistema dinamico discreto definito da f.

(*) Pervenuto in Redazione il 20 dicembre 1989.

(**) Indirizzo dell'Autore: Facoltà di Ingegneria – Università della Basilicata – 85100 Potenza (Italy).

Ponendo $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$, $\alpha \in [0,1]$, un classico risultato di Siegel [6] asserisce che la SFE è "quasi sempre" risolubile. Esiste infatti un insieme Γ di misura 1, $\Gamma \subseteq [0,1]$ tale che, se $\alpha \in \Gamma$, l'equazione funzionale è risolubile per ogni funzione analitica f avente $e^{2\pi i\alpha}z$ come parte lineare. Tale insieme Γ è caratterizzato da una condizione aritmetica di tipo diofanteo.

Recentemente, ci si è rivolti alla considerazione di funzioni "a parametro quadratico", cioè in cui α è un irrazionale quadratico. Infatti in questo caso, come è mostrato in [3], una buona parte delle costanti relative al significato geometrico-dinamico del problema (relative ad esempio al dominio in cui la SFE è soddisfatta) ed alla natura frattale di $J(f)$ [1] sono effettivamente computabili o comunque stimabili. Data la densità dell'insieme degli irrazionali quadratici in Γ, è naturale chiedersi se le soluzioni delle SFE con parametro quadratico possano essere usate per approssimare uniformemente le soluzioni (quando esistono) con parametro qualunque.

Lo scopo della presente nota è di far vedere che "quasi tutte" le funzioni di Koenigs sono approssimabili uniformemente mediante funzioni di Koenigs quadratiche. Si può poi mostrare con un esempio che i parametri quadratici necessari per ottenere tale approssimazione vanno scelti con cura; la sola densità di questi numeri in Γ non è di per sè sufficiente a garantire la convergenza in norma uniforme delle soluzioni.

1. Rinviamo ai testi specializzati, ad esempio [5], per le nozioni fondamentali di carattere aritmetico-diofanteo. Se α è irrazionale, denotiamo con $\alpha = [a_0, a_1, \dots a_n, \dots]$ il suo sviluppo in frazione continua illimitata. Richiamiamo la definizione del seguente insieme numerico, introdotto in [6]:

$\Gamma = \{\alpha \in [0,1] \mid \exists \varepsilon, \mu > 0$ tali che $|q\alpha - p| > \varepsilon q^{-\mu}$, per ogni coppia $p, q \in \mathbf{Z},\ q \geq 1\}$.

Osserviamo che Γ contiene i numeri di Roth e quindi, per il teorema di Roth-Thue-Siegel, contiene pure gli irrazionali algebrici.

LEMMA. *Sia $\alpha \in \Gamma$. Allora esistono $\varepsilon, \mu > 0$ ed una successione $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ di irrazionali quadratici tali che $|q\alpha - p| > \varepsilon q^{-\mu}$, $|q\alpha_k - p| > \varepsilon q^{-\mu}$ per ogni coppia $p, q \in \mathbf{Z}, q \geq 1$ e per ogni $k \in \mathbf{N}$. Inoltre $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha$.*

Dim. Posto $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$, definiamo $\alpha_k = [a_{0,k} a_{1,k}, \ldots]$ $k \in \mathbf{N}$ dove $a_{n,k} = a_n$, se $n \leq k$, $a_{n,k} = 1$, se $n > k$. Si vede facilmente dalla definizione che gli α_k appartengono a $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ e che la loro successione converge ad α. Indichiamo con p_n/q_n l'n-simo convergente di α e con $p_{n,k}/q_{n,k}$ l'n-esimo convergente di α_k.

Dimostriamo innanzitutto che, se $n < k$, si ha: $|q_n \alpha_k - p_n| = |q_{n,k} \alpha_k - p_{n,k}| \geq 1/2\, |q_n \alpha - p_n|$.

Osserviamo che, nell'ipotesi $n < k$, si ha $p_n = p_{n,k}$ e $q_n = q_{n,k}$. Sia, per ogni $n > 0$, $a'_n = [a_n, a_{n+1}, \ldots]$ ed analogamente $a'_{n,k} = [a_{n,k}, a_{n+1,k}, \ldots]$. Allora ([5], pag. 36), $|q_n \alpha - p_n| = (q'_{n+1})^{-1}$, con $q'_n = a'_n q_{n-1} + q_{n-2}$. Si avrà analogamente: $|q_{n,k} \alpha_k - p_{n,k}| = (q'_{n+1,k})^{-1} = (a'_{n+1,k} q_{n,k} + q_{n-1,k})^{-1} = [q_{n,k}(a'_{n+1,k} + q_{n-1,k}/q_{n,k})]^{-1}$. Poichè $n < k$, si ha $a_{n+1} = a_{n+1,k}$ e pertanto $|a'_{n+1} - a'_{n+1,k}| \leq 1$. Da quanto osservato più sopra, segue: $[q_{n,k}(a'_{n+1,k} + q_{n-1,k}/q_{n,k})]^{-1} \geq [q_n(a'_{n+1} + 1 + q_{n-1}/q_n)]^{-1} \geq [q_n(a'_{n+1} + q_{n-1}/q_n) + q_n]^{-1} \geq [\,|q_n \alpha - p_n|^{-1} + q_n]^{-1}$.

Poichè $a'_{n+1} > 1$, $|q_n \alpha - p_n|^{-1} > q_n$. Allora si ottiene $[\,|q_n \alpha - p_n|^{-1} + q_n]^{-1} \geq 1/2\, |q_n \alpha - p_n|$, e la prima parte del lemma risulta provata. Supponiamo ora che $\alpha \in \Gamma$. Allora esisteranno $\varepsilon', \mu' > 0$ tali che $|q\alpha - p| > \varepsilon' q^{-\mu'}$ con p, q interi relativi, $q \geq 1$.

Se $n < k$, per quanto abbiamo testè dimostrato si ha: $|q_{n,k} \alpha_k - p_{n,k}| \geq 1/2 \cdot |q_n \alpha - p_n| \geq \varepsilon'/2 \cdot q_n^{-\mu'} \geq \varepsilon'/2 \cdot q_{n,k}^{-\mu}$.

Se $n \geq k$, $a'_{n+1,k} = [1, 1, \ldots] = (\sqrt{5} + 1)/2$. In questo caso: $|q_{n,k} \alpha_k - p_{n,k}| = [q_{n,k}(a'_{n+1,k} + q_{n-1,k}/q_{n,k})]^{-1} \geq 2(\sqrt{5} + 3) \cdot q_{n,k}^{-1}$. Ponendo $\varepsilon = \inf(\varepsilon'/2, 2/(\sqrt{5}+3))$ e $\mu = \sup(1, \mu')$ si ha, per ogni convergente $p_{n,k}/q_{n,k}$, $|q_{n,k} \alpha_k - p_{n,k}| \geq \varepsilon q_{n,k}^{-\mu}$. Ovviamente $|q\alpha - p| > \varepsilon q^{-\mu}$ a fortiori.

Fissato ora k, e dati $p, q \in \mathbf{Z}$, $q \geq 1$, dato n tale che $q_{n-1,k} \leq q < q_{n,k}$, si ha ([5], pag. 44), che: $|q\alpha_k - p| \geq |q_{n-1,k} \alpha_k - p_{n-1,k}| \geq \varepsilon q_{n-1,k}^{-\mu} \geq \varepsilon q^{-\mu}$, ed il lemma è completamente dimostrato.

TEOREMA. *Sia* $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$, *con* $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$, $\alpha \in \Gamma$, $a_i \in \mathbf{C}$ *una funzione analitica in un intorno dell'origine. Allora esiste una successione di irrazionali quadratici* $\{\beta_k\}_{k \in \mathrm{N}}$ *tali che, posto* $\mu_k = e^{2\pi i \beta_k}$, $g_k(z) = f(z) + (\mu_k - \lambda) \cdot z$, *e detta* φ_k *la funzione di Koenigs di* g_k, *si ha* $\phi(z) = \lim_{k \to \infty} \varphi_k(z)$ *uniformemente in un intorno di* 0, *essendo ϕ la funzione di Koenigs di f.*

Dim. Costruiamo la successione $\{\alpha_k\}_{k\in\mathrm{N}}$ come nel lemma. Sappiamo che gli α_k sono irrazionali quadratici appartenenti a $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ e che la loro successione converge ad α. Esisteranno allora, in virtù del lemma, ε e μ positivi con $|q\alpha - p| \geq \varepsilon q^{-\mu}$ e $|q\alpha_k - p| \geq \varepsilon q^{-\mu}, \forall p, q \in \mathbf{Z}, q \geq 1$. Definiamo inoltre $\lambda_k = e^{2\pi i \alpha_k}$. Poniamo $f_k(z) = f(z) + (\lambda_k - \lambda) z$. Poichè sia α che gli α_k appartengono a Γ, è possibile costruire le soluzioni, dette rispettivamente ϕ e ϕ_k (cioè le funzioni di Koenigs) delle equazioni funzionali $\phi(\lambda z) = f(\phi(z))$ e $\phi_k(\lambda_k z) = f_k(\phi_k(z))$. La costruzione di tali soluzioni è attuata mediante il procedimento di Siegel (vedi [6] pagg. 192-198).

La tecnica di tale procedimento mette in luce i seguenti fatti, fondamentali per la nostra dimostrazione, che qui riportiamo succintamente usando le stesse notazioni del testo citato.

a) La soluzione della SFE è definita in un intorno il cui raggio $r/2$ dipende solo dalle costanti ε e μ associate ad $\alpha \in \Gamma$ e dalla parte non lineare della funzione analitica assegnata, cioè da $\hat{f}(z) = f(z) - \lambda z'$.

b) In tale intorno, la soluzione della SFE è limite uniforme di una successione di funzioni analitiche la cui derivata è uniformemente limitata in modulo da una costante c_3 che dipende solo da ε e da μ. Pertanto, la derivata della soluzione è limitata in modulo dalla stessa c_3.

Ciò premesso, poichè nel nostro caso α e gli α_k hanno le stesse costanti ε e μ, ed inoltre f ed f_k differiscono soltanto per la parte lineare, cioè $\hat{f}(z) = \hat{f}_k(z)$, si avrà quindi nell'intorno chiuso di raggio $r/4$, $|\phi'(z)| \leq c_3$ e $|\phi_k'(z)| \leq c_3$. Poichè $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha$ si avrà che esiste una successione di reali positivi $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathrm{N}}$ tali che $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ e $|\lambda - \lambda_k| < \varepsilon_k$. Allora, da quanto asserito sopra, segue che nel cerchio di raggio $r/4$ si ha $|\lambda_k z - \lambda z| \leq \varepsilon_k \cdot r/4$, e quindi $|\phi_k(\lambda z) - \phi_k(\lambda_k z)| \leq \varepsilon_k \cdot r/4 \cdot c_3$. Inoltre $|f_k(\phi_k(z)) - f(\phi_k(z))| \leq \varepsilon_k |\phi_k(z)| \leq \varepsilon_k \cdot r/4 \cdot c_3$. Pertanto in definitiva, sempre per $|z| < r/4$: $|\phi_k(\lambda z) - f(\phi_k(z))| \leq |\phi_k(\lambda z) - \phi_k(\lambda_k z)| + |\phi_k(\lambda_k z) - f_k(\phi_k(z))| + |f_k(\phi_k(z)) - f(\phi_k(z))| \leq \varepsilon_k \cdot r/4 \cdot c_3 + \varepsilon_k \cdot r/4 \cdot c_3 \leq \varepsilon_k \cdot r/2 \cdot c_3$. Notiamo che il secondo addendo è nullo perchè ϕ_k è la funzione di Koenigs di f_k. Dato che $|\phi_k'(z)| \leq c_3, \forall k \in \mathbf{N}$, la successione $\{\phi_k(z)\}_{k<\mathrm{N}}$ è equicontinua e uniformemente limitata nell'intorno chiuso $|z| \leq r/4$. Si potrà allora estrarre da essa una sottosuccessione $\{\varphi_k(z)\}_{k\in N}$ uniformemente convergente ad una funzione φ, che risulterà analitica nel disco $|z| \leq r/4$. Diciamo $\{\beta_k\}$ la successione dei quadratici, estratta dalla successione $\{\alpha_k\}$ e corrispondente alle funzioni $\varphi_k(z)$, $k \in$ N. Si ha pertanto, posto $\mu_k = e^{2\pi i\beta_k}$ e $g_k(z) = f(z) + (\mu_k - \lambda)z$, che $\varphi_k(\mu_k z) = g_k(\varphi_k(z))$. Da quanto abbiamo dimostrato sopra per le ϕ_k, che vale in particolare per la sottosuccessione delle φ_k si avrà che, dato $\varepsilon > 0$, esiste un n_0 tale che, $\forall n > n_0$:

$$(1) \qquad |\varphi_n(\lambda z) - f(\varphi_n(z))| < \varepsilon, \ \forall z| \ |z| \leq r/4 \ .$$

Verifichiamo che $\varphi(\lambda z) = f(\varphi z))$, cioè che φ è funzione di Koenigs di f nel disco chiuso predetto. Infatti, se per assurdo esistesse uno z_0 con $\varphi(\lambda z_0) \neq f(\varphi(z_0))$ si avrebbe ovviamente: $|\varphi(\lambda z_0) - f(\varphi(z_0)| > a > 0$.

Per la continuità uniforme di f nel suddetto dominio chiuso esiste un S tale che, se $|z - z'| < S$, $|f(z) - f(z')| > a/3$. Per la convergenza uniforme di $\{\varphi_k\}$ a φ esisterà inoltre un n_0 per cui, se $n > n_0$, $|\varphi_n(z) - \varphi(z)| < \inf(S, a/3)$. Possiamo inoltre trovare, per la (1), un n_1 tale che, se $n > n_1$, $|\varphi_n(\lambda z) - f(\varphi_n(z))| < a/3$. Per $n > \sup(n_0, n_1)$ si ha allora, poichè $|\lambda| = 1$, $|\varphi(\lambda z_0) - f(\varphi(z_0))| \leq |\varphi(\lambda z_0) - \varphi_n(\lambda z_0)| + |\varphi_n(\lambda z_0) - f(\varphi_n(z_0))| + |f(\varphi_n(z_0)) - f(\varphi(z_0))| < a/3 + a/3 + a/3 = a$. Assurdo.

Per l'unicità della soluzione della SFE si deve quindi avere $\varphi = \phi$, ed il teorema è quindi dimostrato.

2. Mostriamo ora con un esempio, modellato su idee contenute in [2], che la successione di quadratici $\{\beta_k\}$ va effettivamente scelta in modo opportuno. Con una qualsiasi successione di quadratici convergente ad α non si ha, in generale, alcuna convergenza delle funzioni di Koenigs.

Dato $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$, $\alpha \in \Gamma$ e $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ denotiamo come al solito con p_n/q_n l'n-simo convergente di α e definiamo, per ogni $k \in$ N, $\gamma_k = [c_{0,k}, c_{1,k}, \ldots, c_{n,k}, \ldots]$ nel modo seguente:

$$c_{n,k} = \begin{cases} a_n, & \text{se } n \leq k \\ 2\pi q_k^{2^{q_k}-2}, & \text{se } n = k+1 \\ 1, & \text{se } n > k+1 \end{cases}$$

Notiamo che $\gamma_k \in \mathbf{Q}(\sqrt{5})$, per ogni k, e che $\lim_{k\to\infty} \gamma_k = \alpha$. Inoltre osserviamo incidentalmente che γ_k differisce da α_k solo per il $(k+1)$-esimo coefficiente dello sviluppo in frazione continua. Poniamo $V_k = e^{2\pi i \gamma_k}$ e $f_k(z) = V_k z + z^2$. Siano ϕ_k le funzioni di Koenigs di f_k e ϕ quella di $f = \lambda z + z^2$. Supponiamo per assurdo che si abbia $\lim_{k\to\infty} \phi_k(z) = \phi(z)$ uniformemente in un intorno dell'origine di raggio $\rho > 0$. Sia h abbastanza grande da rendere $1/q_h < \rho$. Consideriamo $f_h(z)$. Denotiamo con $f_h^s(z)$ la s-esima iterata di $f_h(z)$. Si avrà ovviamente $f_h^s(z) = V_h^s z + \ldots + z^{2^s}$. I punti fissi diversi da 0 di tale iterata, cioè quelli in cui $f_h^s(z) = z, z \neq 0$, sono le radici dell'equazione algebrica $(V_k^s - 1) + \ldots + z^{2^s - 1} = 0$. Poniamo $s = q_h$. Abbiamo allora che il prodotto dei moduli di tali radici eguaglia $|V_h^{q_h} - 1|$. Detta z_0 una radice di modulo minimo, e $r = |z_0|$, si avrà allora, essendo tali radici in numero di $2^{q_h} - 1$: $r^{2^{q_h}-1} \leq |V_h^{q_h} - 1|$. Poichè p_h/q_h è l'h-esimo convergente di γ_h, allora $|q_h\gamma_h - p_h| < 1/2$ e pertanto: $|V_h^{q_h} - 1| = 2\ |\mathrm{sen}(\pi q_h \gamma_h)| = 2\,\mathrm{sen}(\pi|q_h\gamma_h - p_h|) \leq 2\pi|q_h\gamma_h - p_h|$.

Inoltre, sappiamo che $|q_h\gamma_h - p_h| \leq (c_{h+1,h}q_h)^{-1}$. In conclusione, poichè $c_{h+1,h} = 2\pi q_h^{2^{q_h}-2}$, abbiamo: $r^{2^{q_h}-1} \leq |V_h^{q_h} - 1| \leq 2\pi|q_h\gamma_h - p_h| \leq 2\pi(c_{h+1,h}q_h)^{-1} \leq (q_h^{2^{q_h}-1})^{-1}$. Allora $r < 1/q_h < \rho$.

Osserviamo ora che, se z è interno al dominio in cui la SFE $\phi_h(V_h z) = f_h(\phi_h(z))$ è soddisfatta, si ha che l'iterata s-esima $f_h^s(z)$ soddisfa all'equazione funzionale: $\phi_h(V_h^s z) = f_h^s(\phi_h(z))$. Allora otterremo, per ogni z appartenente al suddetto dominio, per $s = q_h$: $\phi_h(V_h^{q_h} z) \circ \phi_h^{-1}(z) = f_h^{q_h}(z)$, da cui: $\phi_h(V_h^{q_h}\phi_h^{-1}(z)) = f_h^{q_h}(z)$. Ciò implica infine: $V_h^{q_h}\phi_h^{-1}(z) = \phi_h^{-1}(f_h^{q_h}(z))$. Poichè $|z_0| < \rho$, ed in esso la SFE è dunque soddisfatta, si ha $V_k^{q_h}\phi_h^{-1}(z_0) = \phi_h^{-1}(f_h^{q_h}(z_0))$. Ma z_0 è punto fisso di $f_h^{q_h}$; quindi si ottiene $V_h^{q_h}\phi_h^{-1}(z_0) = \phi_h^{-1}(z_0)$. Assurdo perchè essendo $V_h = e^{2\pi i \gamma_h}$, con γ_h irrazionale, esso non può essere radice dell'unità. Pertanto la successione $\{\phi_k\}$ non può convergere uniformemente a ϕ nel disco $|z| < \rho$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BLANCHARD P., *Complex analytic dynamics on the Riemann sphere*, Bull. Amer. Math. Soc. *11*, N. 1 (1984), 85-141.

[2] CREMER H., *Zum Zentrumproblem*, Math. Ann. *98* (1928), 151-163.

[3] de la LLAVE R., *A simple proof of a particular case of C. Siegel center theorem*, J. Math. Phys. *24* (1983), 2118-2121.

[4] LYUBICH M., *The dynamics of rational transforms: the topological picture*, Russ. Math. Surveys *41* (1986), 43-117.

[5] PERRON O., *Die Lehre von den Ketterbrüchen*, Band I, Teubner (1954).

[6] SIEGEL C. e MOSER J., *Lectures on celestial mechanics*, Springer (1971).