CLASSI QUASI ADDITIVE DI EVENTI E COERENZA DI PROBABILITÀ CONDIZIONATE (*)

di ANGELO GILIO (a Roma) (**)

SOMMARIO. - *Basandosi sul concetto di C_0-coerenza, si dimostra che, fissata una probabilità condizionata finitamente additiva P su $\mathcal{E} \times \mathcal{X}$, con $\mathcal{E}$ algebra di eventi, se la classe $\mathcal{X}$ degli eventi condizionanti è P-quasi additiva, P è una probabilità condizionata coerente. Si esamina, inoltre, il prolungamento di P su $\mathcal{E} \times \mathcal{X}^*$, con $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}^*$, tale che la classe $\mathcal{X}^*$ degli eventi condizionanti sia additiva. Si considerano, infine, alcuni esempi di classi P-quasi additive e si dà un criterio sufficiente di quasi additività.*

SUMMARY. - *By using the C_0-coherence concept, we prove that, given a finitely additive conditional probability P on $\mathcal{E} \times \mathcal{X}$, with $\mathcal{E}$ an algebra of events, if the class $\mathcal{X}$ of the conditioning events is P-almost additive then P is a coherent conditional probability. Moreover, the extension of P on $\mathcal{E} \times \mathcal{X}^*$, with $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}^*$, such that the class $\mathcal{X}^*$ of the conditioning events is additive, is examined. Finally, some examples of P-almost additive classes are shown and a sufficient criterion of almost additivity is given.*

1. Introduzione.

Diverse concezioni assiomatiche di probabilità condizionata finitamente additiva, più o meno analoghe fra di loro, sono presenti in letteratura (*S. Mazurkiewicz* (1932), *J. Hosiasson-Lindenbaum* (1940), *B. de Finetti* (1949), *P.H. Krauss* (1968), *L.E. Dubins* (1975)). In *A. Renyi* (1955) si postula in più la σ-additività.

La teoria delle probabilità condizionate può anche essere sviluppata sulla base di un principio di coerenza, introdotto in *B. de Finetti* (1937), inizialmente per gli eventi non condizionati. La definizione di coerenza

(*) Pervenuto in Redazione il 3 ottobre 1989.

(**) Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate – Università degli Studi di Roma "La Sapienza" – Via A. Scarpa, 10 – 00161 Roma (Italy).

è stata poi "rinforzata" da *de Finetti* stesso (1970), pp.722-723, con l'aggiunta di un ulteriore assioma.

Definizioni esplicite di coerenza per gli eventi condizionati, basate sul criterio della scommessa, sono state proposte in lavori di *R.S. Lehman* (1955), *P.M. Williams* (1975), *E. Regazzini* (1983), *S. Holzer* (1984).

Come è noto, una probabilità condizionata coerente soddisfa tutte le proprietà delle probabilità condizionate finitamente additive.

Viceversa, data una probabilità condizionata finitamente additiva P definita su $\mathcal{E} \times \mathcal{X}$, dove $\mathcal{E}$ è un'algebra di eventi e $\mathcal{X}$ è una famiglia non vuota di eventi possibili di $\mathcal{E}$, si dimostra che, se la famiglia $\mathcal{X}$ possiede una opportuna struttura, P è una probabilità condizionata coerente.

Ricordiamo, in proposito, alcune condizioni *sufficienti* di coerenza

(a) $\mathcal{X} = \mathcal{E}^0 = \mathcal{E}\setminus\{\emptyset\}$ (*R.S. Lehman* (1955)). In questo caso P si dice una probabilità condizionata *completa su* $\mathcal{E}$ (*L.E. Dubins* (1975));

(b) $\mathcal{X} \cup \{\emptyset\}$ sottoalgebra di $\mathcal{E}$ (*E. Regazzini* (1983));

(c) $\mathcal{X}$ classe additiva (*S. Holzer* (1984)).

In *A. Gilio* (1988), utilizzando il *criterio della scommessa*, si dimostra, in modo diretto, che la condizione

(d) $\mathcal{X}$ classe P-quasi additiva,

è sufficiente per la coerenza della P.

Come è osservato nel suddetto lavoro, la sufficienza della condizione (d) si può dimostrare anche in modo indiretto, utilizzando un risultato di *Ā. Csāszār* (1955), insieme con la condizione (c) oppure con il procedimento seguito da *P. Rigo* (1988).

Per le condizioni (a), (b), (c), (d) vale la seguente catena di implicazioni logiche

$$(a) \rightarrow (b) \rightarrow (c) \rightarrow (d) .$$

In un recente lavoro (*A. Gilio* (1990)), in cui si riprende il *criterio di penalizzazione* di *de Finetti*, viene studiata un'opportuna modifica della *condizione di coerenza* relativa al suddetto criterio.

Si ottiene in tal modo una definizione di coerenza C_0 *unificata* (applicabile ad eventi condizionati e non), dalla quale è possibile dedurre (*A. Gilio* (1989)) tra l'altro il seguente

1.1. TEOREMA. *Data una funzione reale P definita su $\mathcal{E} \times \mathcal{X}$, con $\mathcal{E}$ algebra di eventi, $\mathcal{X} \subset \mathcal{E}$, $H \neq \emptyset$ per ogni $H \in \mathcal{X}$, si ha*

(i) *Se P è coerente secondo C_0, allora P é una probabilità condizionata finitamente additiva su $\mathcal{E} \times \mathcal{X}$;*

(ii) *Se P è una probabilitá condizionata finitamente additiva su $\mathcal{E} \times \mathcal{X}$, con $\mathcal{X}$ classe additiva, allora P è coerente secondo C_0.*

In questo lavoro, dopo aver ricordata la nozione di *classe quasi additiva* rispetto a P (che indicheremo anche con il termine *classe P-quasi additiva*), si riassumono i passi essenziali della dimostrazione (data in *A. Gilio* (1988) sulla base del criterio della scommessa) della coerenza di P, quando $\mathcal{X}$ è una classe P-quasi additiva.

Successivamente, facendo riferimento diretto al *criterio di penalizzazione* con la *condizione di coerenza* C_0, si dimostra che se P è una *probabilità condizionata finitamente additiva* definita su $\mathcal{E} \times \mathcal{X}$, con $\mathcal{E}$ algebra di eventi ed $\mathcal{X}$ *classe P-quasi additiva, P è coerente secondo C_0.*

Si illustra, inoltre, il *prolungamento* della P come probabilità condizionata finitamente additiva P^* definita su $\mathcal{E} \times \mathcal{X}^*$, con $\mathcal{X}^*$ *classe additiva.*

Vengono, infine, esaminati alcuni esempi di classi P-quasi additive.

2. Osservazioni preliminari.

Richiamiamo brevemente alcune definizioni e risultati noti, utili per gli sviluppi successivi.

Data una funzione reale P, definita su una classe arbitraria $\mathcal{K}$ di eventi condizionati, e fissata una n-pla $\mathcal{F} = \{E_1|H_1,\ E_2|H_2, \ldots, E_n|H_n\}$ di eventi in $\mathcal{K}$, poniamo

$$(1) \qquad P(E_i|H_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Scelti, inoltre, n numeri reali arbitrari $s_1, s_2, \ldots, s_n$, consideriamo la quantità

$$(2) \qquad G = \sum_{i=1}^{n} s_i H_i (E_i - p_i) \ ,$$

dove i simboli $E_i, H_i, i = 1, 2, \ldots n$, rappresentano gli indicatori dei corrispondenti eventi.

Com'è noto, se le probabilità degli eventi di $\mathcal{F}$ sono date dalla (1), G rappresenta il guadagno (aleatorio) totale, relativo a una combinazione di scommesse su tali eventi, di importi $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

Posto, allora, $H_0 = H_1 \vee H_2 \vee \ldots \vee H_n$ e indicato con $G|H_0$ la *restrizione* di G ad H_0, abbiamo

2.1. DEFINIZIONE. La funzione reale P, definita su $\mathcal{K}$, si dice una *probabilità condizionata coerente*, se per ogni famiglia *finita* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}$ si ha

$$\text{Inf } G|H_0 \cdot \text{Sup } G|H_0 \leq 0 \,. \tag{3}$$

Detti $C_1, C_2, \ldots, C_s$ i *costituenti* relativi alla famiglia $\{E_1, E_2, \ldots, E_n, H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ e *favorevoli* all'evento H_0, i valori $g_1, g_2, \ldots, g_s$, che G assume in corrispondenza di tali costituenti, rappresentano i possibili valori di $G|H_0$. Allora la condizione di coerenza (3) si può scrivere anche

$$\underset{h}{\text{Min}}\, g_h \cdot \underset{h}{\text{Max}}\, g_h \leq 0 \,. \tag{4}$$

2.2. DEFINIZIONE. Data un'algebra $\mathcal{E}$ di eventi e una famiglia non vuota $\mathcal{X}$ costituita da eventi possibili di $\mathcal{E}$, una funzione reale P definita su $\mathcal{E} \times \mathcal{X}$ si dice una *probabilità condizionata finitamente additiva* se soddisfa le seguenti proprietà:

(i) $P(\cdot|H)$ è una probabilità finitamente additiva su $\mathcal{E}$, per ogni $H \in \mathcal{X}$;
(ii) $P(H|H) = 1$, per ogni $H \in \mathcal{X}$;
(iii) $P(AB|C) = P(B|C)P(A|BC)$, per ogni A, B, C, con $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}, C \in \mathcal{X}, BC \in \mathcal{X}$.

2.3. DEFINIZIONE. La famiglia $\mathcal{X}$ si dice *additiva* se, per ogni H_1, H_2 appartenenti ad $\mathcal{X}$, $H_1 \vee H_2$ appartiene ad $\mathcal{X}$.

2.4. DEFINIZIONE. La famiglia $\mathcal{X}$ si dice P*-quasi additiva* (o anche *quasi additiva* rispetto a P) se, per ogni H_1, H_2 appartenenti ad $\mathcal{X}$, esiste $K \in \mathcal{X}$, tale che

(i) $H_1 \vee H_2 \subseteq K$;
(ii) $P(H_1|K) + P(H_2|K) > 0$.

2.5. OSSERVAZIONE. Se $\mathcal{X}$ è una famiglia additiva, $\mathcal{X}$ è quasi additiva rispetto ad ogni P.

Infatti, se $\mathcal{X}$ è additiva, per ogni H_1, H_2 appartenenti ad $\mathcal{X}$ si ha $H_1 \vee H_2 \in \mathcal{X}$; inoltre, per ogni probabilità condizionata finitamente additiva P definita su $\mathcal{E} \times \mathcal{X}$, si ha ovviamente

$$P(H_1|H_1 \vee H_2) + P(H_2|H_1 \vee H_2) \geq 1 ,$$

e quindi $\mathcal{X}$ è P-quasi additiva.

3. Classi quasi additive e coerenza.

Data un'algebra $\mathcal{E}$ di eventi, sia $\mathcal{X}$ una famiglia non vuota di eventi possibili di $\mathcal{E}$.

Sia, inoltre, P una probabilità condizionata finitamente additiva su $\mathcal{E} \times \mathcal{X}$ e supponiamo che $\mathcal{X}$ sia P-quasi additiva.

Considerata una n-pla arbitraria di eventi condizionati $E_1|H_1, E_2|H_2, \ldots, E_n|H_n$, con $E_i \in \mathcal{E}$, $H_i \in \mathcal{X}$, $i = 1,2,\ldots,n$, poichè $\mathcal{X}$ è P-quasi additiva, esistono degli eventi $K_2, K_3, \ldots, K_n$ appartenenti ad $\mathcal{X}$ tali che, posto $K_1 = H_1$ si ha

$$(5) \qquad H_i \vee K_{i-1} \subseteq K_i, \quad i = 2,3,\ldots,n,$$

$$(5') \qquad P(H_i|K_i) + P(K_{i-1}|K_i) > 0 .$$

Dalla (5) segue ovviamente

$$(6) \qquad H_1 \vee H_2 \vee \ldots \vee H_n = H_0 \subseteq K_n .$$

In *A. Gilio* (1988) si dimostra il seguente

3.1. LEMMA. *Per almeno un indice* $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, *si ha* $P(H_i|K_n) > 0$, *ovvero*

$$(7) \qquad P(H_0|K_n) > 0 .$$

Ricordando, poi, i simboli introdotti nella Definizione 2.1., si ha

(8) $$H_0 = C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_s ,$$

e quindi, essendo

(9) $$\sum_{h=1}^{s} P(C_h|K_n) = P(H_0|K_n) > 0 ,$$

dev'essere

(10) $$P(C_h|K_n) > 0 ,$$

per almeno un indice h.

Con riferimento al *criterio della scommessa* e sfruttando la (10), in *A. Gilio* (1988) si dimostra quindi il seguente

3.2. TEOREMA. *Se P è una probabilità condizionata finitamente additiva su $\mathcal{E} \times \mathcal{X}$, con $\mathcal{X}$ P-quasi additiva, P è coerente.*

Nella dimostrazione del suddetto teorema si sfrutta un procedimento sostanzialmente simile a quello introdotto in *R.S. Lehman* (1955) e utilizzato anche in *E. Regazzini* (1983) e *S. Holzer* (1984).

3.3. OSSERVAZIONE. la condizione di quasi additività per una famiglia $\mathcal{X}$ si può esprimere anche mediante le (6) e (7), cioè richiedendo che, per ogni n-pla di eventi $H_1, H_2, \ldots, H_n$, con $H_i \in \mathcal{X}, i = 1, 2, \ldots, n$, esista un evento $K_n \in \mathcal{X}$ tale che

(a) $$H_1 \vee H_2 \ldots \vee H_n = H_0 \subseteq K_n ;$$

(b) $$P(H_0|K_n) > 0 .$$

Infatti, come abbiamo visto, se $\mathcal{X}$ è P-quasi additiva valgono le (6) e (7), cioè le (a) e (b).

Viceversa, poichè $P(H_1 \vee H_2|K_2) \leq P(H_1|K_2) + P(H_2|K_2)$, dalle (a) e (b), applicate per $n = 2$, segue che $\mathcal{X}$ è P-quasi additiva.

4. La condizione C_0.

La coerenza di una probabilità condizionata finitamente additiva P, quando la classe degli eventi *condizionanti* $\mathcal{X}$ è P-*quasi additiva*, si può dimostrare anche ricorrendo a un'altra condizione C_0 di coerenza, studiata in *A. Gilio* (1990).

Tale condizione si basa su una opportuna modifica di quella proposta da *B. de Finetti* (1970) in relazione al criterio di penalizzazione.

In proposito, ricordiamo che, considerata una n-pla di eventi condizionati $\mathcal{F} = \{E_1|H_1, E_2|H_2, \ldots, E_n|H_n\}$, e indicato con $\mathcal{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ un insieme di valutazioni di probabilità per tali eventi, la penalizzazione totale corrispondente al punto previsione $\mathcal{P}$ è data da

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} H_i \left(\frac{E_i - P_i}{k_i} \right)^2 ,$$

con $k_1, k_2, \ldots, k_n$ costanti arbitrarie.

Indicati con $C_1, C_2, \ldots, C_m$ i costituenti relativi alla famiglia $\{E_1, \ldots, E_n, H_1, \ldots, H_n\}$ e con $L_1, L_2, \ldots, L_m$ i corrispondenti valori della penalizzazione totale $\mathcal{L}$, il criterio si basa sulla seguente condizione C_0 di coerenza

4.1. DEFINIZIONE. Un insieme di valutazioni $\mathcal{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ si dice *coerente* se non esiste un altro insieme di valutazioni $\mathcal{P}^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*)$ tale che si abbia $\mathcal{L}^* \leq \mathcal{L}$, $\mathcal{L}^* \not\equiv \mathcal{L}$, cioè $L_h^* \leq L_h$, $h = 1, 2, \ldots, m$, con la disuguaglianza verificata strettamente per almeno un indice h.

In *A. Gilio* (1990) viene introdotto, inoltre, il concetto di costituente generalizzato, o $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$–atomo, per gli eventi condizionati nel seguente modo

4.2. DEFINIZIONE. Indicati con $C_1, C_2, \ldots, C_s$ i costituenti favorevoli all'evento H_0, unione di $H_1, H_2, \ldots, H_n$, ad ogni costituente C_h si associa univocamente un *costituente generalizzato* Q_h, *relativo alla famiglia* $\mathcal{F}$ *ed al punto previsione* $\mathcal{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, cosí definito

$$Q_h = (q_{h1}, q_{h2}, \ldots, q_{hn}) , \tag{11}$$

con

$$q_{hj} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad C_h \subseteq E_j \wedge H_j , \\ 0, & \text{se} \quad C_h \subseteq E_j^c \wedge H_j , \\ p_j , & \text{se} \quad C_h \subseteq H_j^c . \end{cases} \qquad \begin{array}{l} h = 1,2,\ldots,s, \\ j = 1,2,\ldots,n, \end{array}$$

Ai costituenti $C_{s+1}, C_{s+2}, \ldots, C_m$ favorevoli ad H_o^c, in base alla (11), corrispondono i costituenti generalizzati

$$Q_{s+1} = Q_{s+2} = \ldots = Q_m = (p_1, p_2, \ldots, p_n) = \mathcal{P} .$$

Inoltre, per i valori della penalizzazione $\mathcal{L}$, è possibile dare la seguente rappresentazione

$$L_h = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{q_{hj} - p_j}{k_j} \right)^2 , \quad h = 1,\, 2,\, \ldots,\, m .$$

Ovviamente, i valori $L_{s+1}, L_{s+2}, \ldots, L_m$ sono tutti uguali a zero.

Osserviamo che alcuni dei costituenti generalizzati Q_h, $h = 1, 2, \ldots, s$, possono coincidere e quindi il numero r di costituenti generalizzati distinti sarà in genere minore o uguale ad s.

Supporremo, per comodità, che i costituenti generalizzati distinti siano i primi r: $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$.

Data la famiglia $\mathcal{F} = \{E_1|H_1, E_2|H_2, \ldots, E_n|H_n\}$ e il punto previsione $\mathcal{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, ogni k-pla di interi $I_k = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ individua una sottofamiglia di $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_k = \{E_i|H_i : i \in I_k\}$, di cui $\mathcal{P}_k = (p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k})$ è un possibile punto previsione.

Indicando allora con $\mathcal{I}$ l'involucro convesso dei costituenti generalizzati $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$ relativi alla famiglia $\mathcal{F}$ e al punto previsione $\mathcal{P}$ e con $\mathcal{I}_k$ l'involucro convesso dei costituenti generalizzati relativi a $\mathcal{F}_k$ e a $\mathcal{P}_k$ (ovviamente $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}$, $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}, \mathcal{I}_n = \mathcal{I}$), nel lavoro citato si stabilisce la seguente condizione necessaria e sufficiente di coerenza:

4.3. TEOREMA. *Il punto-previsione* $\mathcal{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ *è coerente secondo* C_0 *se e solo se, per ogni* k*-pla* I_k, $k \leq n$, *si ha* $\mathcal{P}_k \in \mathcal{I}_k$.

Data una classe arbitraria $\mathcal{K}$ di eventi condizionati, sia P una funzione reale definita su $\mathcal{K}$. Fissata una n-pla di eventi in $\mathcal{K}$, $\mathcal{F} = \{E_1|H_1, E_2|H_2, \ldots, E_n|H_n\}$, e posto

$$P(E_i|H_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

introduciamo la seguente

4.4. DEFINIZIONE. La funzione reale P, definita su $\mathcal{K}$, si dice una *probabilità condizionata* C_0*-coerente* se, per ogni famiglia finita $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}$, il punto previsione $\mathcal{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ è coerente secondo C_0.

Sfruttando il teorema 4.3., si può allora dimostrare il seguente

4.5. TEOREMA. *Data una probabilità condizionata finitamente additiva* P, *definita su* $\mathcal{E} \times \mathcal{X}$, *con* $\mathcal{E}$ *algebra di eventi, se la classe* $\mathcal{X}$ *è* P*-quasi additiva,* P *è una probabilità condizionata* C_0*-coerente.*

Dim. In base al teorema 4.3., è *sufficiente* verificare che, per ogni n-pla di eventi condizionati $\mathcal{F} = \{E_1|H_1, E_2|H_2, \ldots, E_n|H_n\}$ con $E_i \in \mathcal{E}$, $H_i \in \mathcal{X}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, posto

$$P(E_i|H_i) = p_i, \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{12}$$

per ogni k-pla I_k, si ha

$$\mathcal{P}_k \in \mathcal{I}_k \,. \tag{13}$$

Mostriamo, intanto, che la (13) vale per $k = n$, cioè che si ha $\mathcal{P} \in \mathcal{I}$.

A tale scopo, osserviamo che la famiglia $\mathcal{E}$ essendo un'algebra contiene l'evento H_0, unione di $H_1, H_2, \ldots, H_n$, e i costituenti $C_1, C_2, \ldots, C_s$ ad esso favorevoli. Pertanto risultano definite le quantità

$$P(H_0|K_n)\,, \quad P(C_h|K_n), \quad h = 1, 2, \ldots, s\,,$$

per le quali valgono le (7), (9) e (10).

Dalla relazione $E_iH_i \subseteq H_i \subseteq K_n$ e dalla (12), in base all'assioma (iii) delle probabilità condizionate, segue

$$P(E_iH_i|K_n) = P(E_i|H_i)P(H_i|K_n) = p_iP(H_i|K_n) \; . \tag{14}$$

Inoltre, posto $P(C_h|K_n) = \alpha_h$, $h = 1,2,\ldots,s$, ed essendo

$$P(E_iH_i|K_n) = \sum_{h:C_h\subseteq \mathbf{E}_i\mathbf{H}_i} \alpha_h, \quad P(H_i|K_n) = \sum_{h:C_h\subseteq \mathbf{H}_i} \alpha_h \; ,$$

la (14) si può scrivere

$$\sum_{h:C_h\subseteq \mathbf{E}_i\mathbf{H}_i} \alpha_h = p_i \sum_{h:C_h\subseteq \mathbf{H}_i} \alpha_h, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{15}$$

Osservando che

$$\sum_{h=1}^{s} \alpha_h = P(H_0|K_n) > 0 \; , \tag{16}$$

e posto

$$x_i = \frac{\alpha_i}{\sum_{h=1}^{s} \alpha_h}, \quad i = 1,2,\ldots,s \; , \tag{17}$$

si ha

$$\sum_{h=1}^{s} x_h = 1, \quad x_h \geq 0, \quad h = 1,2,\ldots,s \; , \tag{18}$$

e dalla (15) si ottiene

$$\sum_{h:C_h\subseteq \mathbf{E}_i\mathbf{H}_i} x_h = p_i \sum_{h:C_h\subseteq \mathbf{H}_i} x_h \; , \; i = 1,2,\ldots,n. \tag{19}$$

Dalla (19), tenendo conto della relazione

$$\sum_{h:C_h\subseteq \mathbf{H}_i} x_h = 1 - \sum_{h:C_h\subseteq \mathbf{H}_i^c} x_h \; ,$$

per ogni $i = 1,2,\ldots,n$, si ottiene

$$(20) \qquad p_i = \sum_{h:C_h\subseteq E_iH_i} x_h + p_i \sum_{h:C_h\subseteq H_i^c} x_h =$$

$$= \sum_{h:C_h\subseteq E_iH_i} 1\cdot x_h + \sum_{h:C_h\subseteq E_i^cH_i} 0\cdot x_h + \sum_{h:C_h\subseteq H_i^c} p_i\cdot x_h\ .$$

Allora, ricordando la (11), la (20) si può scrivere

$$(21) \qquad p_i = \sum_{h=1}^{s} x_h q_{hi}, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

ovvero, in forma più sintetica

$$(22) \qquad \mathcal{P} = \sum_{h=1}^{s} x_h Q_h = \sum_{h=1}^{r} \lambda_h Q_h\ ,$$

dove ciascun λ_h è la somma dei coefficienti x_i relativi ai costituenti C_i a cui, in base alla (11), corrisponde uno stesso costituente generalizzato Q_h.

Ovviamente

$$(23) \qquad \lambda_h \geq 0,\quad h = 1,2,\ldots,r;\quad \sum_{h=1}^{r}\lambda_h = \sum_{h=1}^{s} x_h = 1\ .$$

Pertanto, in base alle (22) e (23) il punto $\mathcal{P}$ risulta una *combinazione lineare convessa* dei punti $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$ e come tale appartiene al loro *involucro convesso* $\mathcal{I}$, quindi la (13) è valida per $k = n$.

Considerata, adesso, una m-pla arbitraria di interi $I_m = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\} \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$ essa individua una sottofamiglia di $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_m = \{E_i|H_i : i \in I_m\}$, di cui $\mathcal{P}_m = (p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_m})$ è un possibile punto previsione.

Ricordando che, per ipotesi, la classe $\mathcal{X}$ è P-quasi additiva, in base all'Osservazione 3.3., esiste un evento $K_m \in \mathcal{X}$ tale che

$$(\mathrm{a}) \qquad H^{(m)} = H_{i_1} \vee H_{i_2} \vee \ldots \vee H_{i_m} \subseteq K_m\ ,$$

$$(\mathrm{b}) \qquad P(H^{(m)}|K_m) > 0\ .$$

Introducendo adesso i costituenti relativi alla famiglia $\{E_i, H_i : i \in I_m\}$ e favorevoli all'evento $H^{(m)}$ e i corrispondenti costituenti generalizzati, ottenuti in base alla (11), relativi alla famiglia $\mathcal{F}_m$ e al punto previsione $\mathcal{P}_m$, le considerazioni fatte per il punto $\mathcal{P}$ si possono ripetere in modo del tutto analogo per il punto $\mathcal{P}_m$, cosicchè si può concludere che $\mathcal{P}_m \in \mathcal{I}_m$ e quindi, per l'arbitrarietà di I_m, vale la (13).

Pertanto, in base al Teorema 4.3., il punto previsione $\mathcal{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, ottenuto sulla base della (12), è coerente secondo C_0 e quindi, per l'arbitrarietà di $\mathcal{F}$, tenuto conto della Definizione 4.4., il Teorema 4.5. è dimostrato.

5. Estensione della P.

Nella dimostrazione del Teorema 4.5. (con riferimento, in particolare, alla (13)), nel verificare, ad esempio, che $\mathcal{P} \in \mathcal{I}$, non si sono utilizzate le probabilità

$$P(C_h|H_0), \quad h = 1,2,\ldots,s\,;$$

$$P(E_iH_i|H_0)\,, P(H_i|H_0), \quad i = 1,2,\ldots,n\,.$$

Infatti, non avendo ipotizzato che la classe $\mathcal{X}$ sia *additiva*, non è detto che $H_0 \in \mathcal{X}$ e quindi le suddette probabilità non sono in generale definite.

D'altra parte, se si volesse *prolungare* la P agli eventi condizionati

$$C_h|H_0,\ h = 1,2,\ldots,s;\ E_iH_i|H_0,\ H_i|H_0,\ i = 1,2,\ldots,n,$$

(includendo quindi l'evento H_0 nella classe $\mathcal{X}$), in base alle relazioni

$$C_h \subseteq H_0 \subseteq K_n,\ h = 1,2,\ldots,s\,,$$

applicando l'assioma (iii) delle probabilità condizionate, si avrebbe

$$P(C_h|K_n) = P(C_h|H_0)P(H_0|K_n),\ h = 1,2,\ldots,s\,. \tag{24}$$

Allora, ricordando le (16) e (17), dalla (24) si ottiene

$$P(C_h|H_0) = \frac{P(C_h|K_n)}{P(H_0|K_n)} = \frac{\alpha_h}{\sum_{i=1}^{s}\alpha_i} = x_h\,,\ h = 1,2,\ldots,s\,; \tag{25}$$

$$(26) \qquad P(E_iH_i|H_0) = \sum_{h:C_h \subseteq E_iH_i} x_h, \quad i = 1,2,\ldots,n;$$

$$(27) \qquad P(H_i|H_0) = \sum_{h:C_h \subseteq H_i} x_h\,, \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Quindi, come risulta dalle (17), (19), (25), (26) e (27), le suddette probabilità, condizionate all'evento H_0, sono state *implicitamente* utilizzate nella dimostrazione del Teorema 4.5.

Le considerazioni precedenti suggeriscono che una probabilità condizionata finitamente additiva P, definita su $\mathcal{E} \times \mathcal{X}$, con $\mathcal{X}$ classe P-quasi additiva, può essere *prolungata* come probabilità condizionata finitamente additiva P^*, definita su $\mathcal{E} \times \mathcal{X}^*$, con $\mathcal{X}^*$ *classe additiva*, nel modo seguente

(i) $\mathcal{X}^*$ si ottiene da $\mathcal{X}$ aggiungendo a tale classe, per ogni n, per ogni $H_1, H_2, \ldots, H_n \in \mathcal{X}$, l'evento unione

$$H_0 = H_1 \vee H_2 \vee \ldots \vee H_n\,;$$

(ii) per ogni $E \in \mathcal{E}, H \in \mathcal{X}$, si pone

$$P^*(E|H) = P(E|H)\,;$$

(iii) per ogni $H_1, H_2, \ldots H_n \in \mathcal{X}$, se l'evento unione H_0 non appartiene ad $\mathcal{X}$, detto K_n l'evento in $\mathcal{X}$ tale che $H_0 \subseteq K_n$, con $P(H_0|K_n) > 0$, per ogni $E \in \mathcal{E}$, in base alla (ii) e alla relazione

$$P^*(EH_0|K_n = P^*(E|H_0)P^*(H_0|K_n)\,,$$

si pone

$$P^*(E|H_0) = \frac{P^*(EH_0|K_n)}{P^*(H_0|K_n)} = \frac{P(EH_0|K_n)}{P(H_0|K_n)}\,.$$

5.1. OSSERVAZIONE. La possibilità di prolungare la P su $\mathcal{E} \times \mathcal{X}^*$, con $\mathcal{X}^*$ additiva, permette anche di dimostrare *in modo indiretto* il Teorema 4.5.

Infatti P^*, essendo definita su $\mathcal{E} \times \mathcal{X}^*$, con $\mathcal{X}^*$ additiva, in base al teorema 1.1., è coerente secondo C_0 e tale risulta anche P, che coincide con la *restrizione* su $\mathcal{E} \times \mathcal{X}$ di P^*.

6. Osservazioni ed esempi.

Illustriamo adesso come uno degli esempi comunemente trattati si possa inquadrare dal punto di vista delle classi P-quasi additive.

6.1. ESEMPIO. Data un'algebra di eventi $\mathcal{E}$, sia P una *probabilità finitamente additiva* definita su $\mathcal{E}$. Come è ben noto, P è coerente.

Poichè ogni evento $E \in \mathcal{E}$ si può pensare come l'evento condizionato $E|\Omega$ (dove Ω indica l'evento certo) P si può riguardare come una probabilità condizionata finitamente additiva definita su $\mathcal{E} \times \{\Omega\}$.

Considerati in $\mathcal{E}$ degli eventi $H_1, H_2, \ldots, H_n$ tali che

$$P(H_i) > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{28}$$

per ogni $E \in \mathcal{E}$, è possibile *estendere* in modo coerente la P agli eventi $E|H_i, i = 1, 2, \ldots, n$, e in tal caso, come è noto in base ai risultati di *de Finetti*, si deve porre *necessariamente*

$$P(E|H_i) = \frac{P(EH_i)}{P(H_i)}. \tag{29}$$

Come è noto, la (29) è anche *sufficiente* per la coerenza di P e tale fatto può essere facilmente verificato, inquadrando l'argomento dal punto di vista delle classi P-quasi additive.

Infatti, posto

$$\mathcal{X} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n, \Omega\}, \tag{30}$$

dalla (28) segue che $\mathcal{X}$ è P-quasi additiva.

Allora la P, prolungata mediante la (29), diventa una probabilità condizionata finitamente additiva definita su $\mathcal{E} \times \mathcal{X}$, con $\mathcal{X}$ classe P-quasi additiva, e tale fatto in base al teorema 4.5., ne assicura la coerenza.

6.2 OSSERVAZIONE. Riferendosi al caso in cui la famiglia $\mathcal{X}$ degli eventi condizionanti è *finita*, è possibile individuare un tipo particolarmente semplice di classe P-quasi additiva, suggerito anche dall'Esempio 6.1..

Infatti, applicando la condizione (a) relativa alla definizione data nell' Osservazione 3.3., se $\mathcal{X}$ è una famiglia finita, deve esistere un evento $K \in \mathcal{X}$ tale che, per ogni $H \in \mathcal{X}, H \subseteq K$.

Inoltre, la condizione (b) è soddisfatta se, per ogni $H_1, H_2, \dots, H_n \in \mathcal{X}$, risulta in particolare $P(H_0|K) > 0$, potendo, in tal caso, scegliere come evento K_n ogni volta l'evento K.

Considerata adesso un'algebra $\mathcal{E}$ di eventi, siano $H_1, H_2, \dots, H_m$ ($H_i \neq \emptyset, i = 1, 2, \dots, m$) gli eventi "condizionanti" che interessano in relazione a un dato problema, cioè gli eventi subordinatamente ai quali si richiede di valutare, mediante una P, le probabilità degli eventi di $\mathcal{E}$.

Abbiamo allora il seguente *criterio sufficiente* per la costruzione di una classe P-quasi additiva

6.3. CRITERIO DI QUASI ADDITIVITÀ. Affinchè le valutazioni di probabilità effettuate mediante la P siano coerenti, è sufficiente che P sia definita, come probabilità condizionata finitamente additiva, su $\mathcal{E} \times \mathcal{X}$, con

$$\mathcal{X} = \{H_1, H_2, \dots, H_m, K\}, \tag{31}$$

e dove K è un evento di $\mathcal{E}$ tale che

$$H_i \subseteq K, \quad i = 1, 2, \dots, m; \tag{32}$$

$$P(H_i|K) \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, \tag{33}$$

con $P(H_i|K) = 0$, *al più* per un indice i.

In altri termini, per garantire la coerenza di P, è sufficiente *aggiungere* agli eventi $H_1, H_2 \dots, H_m$ un ulteriore evento condizionante K tale che siano verificate le (32) e (33).

Come mostrano le (31), (32) e (33), la condizione di quasi additività è poco vincolante.

Per particolari valori di m o scegliendo in modo opportuno l'evento K, si ritrovano degli esempi familiari. Ne illustriamo alcuni

6.4. $m = 1, K = H_1$. In questo caso si ha $\mathcal{X} = \{H_1\}$ e la P è una probabilità condizionata finitamente additiva, definita su $\mathcal{E} \times \{H_1\}$.

In particolare, se $H_1 = \Omega$ la P è definita su un'algebra di eventi non condizionati.

6.5. $m = 1$, $H_1 \subset K \subseteq \Omega$. In questo caso la P è definita su $\mathcal{E} \times \{H_1, K\}$ e, in base alla (33), può anche aversi $P(H_1|K) = 0$.

6.6. $\mathcal{X} = \{H_1, H_2, \ldots, H_m, \Omega\}$. Questo caso, che si può riguardare come il più naturale, è stato già esaminato nell'Esempio 6.1. e, come abbiamo visto, può essere associato alle situazioni in cui, dopo aver valutato, per ogni $E \in \mathcal{E}$, la probabilità $P(E|\Omega) = P(E)$, la P viene prolungata come probabilità condizionata sugli eventi $E|H_i$, con $E \in \mathcal{E}$, $H_i \in \mathcal{E}$, $H_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

La C_0-coerenza della P, stabilita in base al teorema 4.5., è in particolare assicurata quando, per ogni $i = 1, 2, \ldots m$, si ha $P(H_i) > 0$, come è stato già illustrato nell'Esempio 6.1., in accordo con i risultati di *de Finetti.*

7. Conclusioni.

La struttura di classe P-quasi additiva, che garantisce la coerenza della P, è facile da ottenere e quindi può risultare utile anche in relazione ad applicazioni a problemi concreti.

A questo proposito, è necessario esaminare la possibilità di "indebolire" la struttura di algebra per la famiglia $\mathcal{E}$, che dal punto di vista applicativo può risultare un vincolo troppo pesante, in quanto richiede l'assegnazione delle probabilità non solo agli eventi di interesse nel problema esaminato, ma a tutto lo spazio dei costituenti.

Un esempio di una probabilità condizionata C_0-coerente P definita su $\mathcal{E} \times \mathcal{X}$, con $\mathcal{E}$ classe additiva e con $\mathcal{X} = \mathcal{E} \setminus \{\emptyset\}$, è dato in *R. Scozzafava-A. Gilio* (1989).

BIBLIOGRAFIA

CSÄSZÄR Ä. (1955), *Sur la structure des espaces de probabilitè conditionnelle*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae *6*, 337-361.

DE FINETTI B. (1937), *La prevision: ses lois logiques, ses sources subjectives*, Ann. Inst. H. Poincaré *7*, 1-68.

DE FINETTI B. (1949), *Sull'impostazione assiomatica del calcolo delle probabilità*, Annali Triestini dell'Un. di Trieste *19*, 29-81.

DE FINETTI B. (1970), *Teoria delle probabilità*, Einaudi Editore Torino.

DUBINS L.E. (1975), *Finitely additive conditional probabilities, conglomerability and disintegrations*, Ann. Probab. *3*, 89-99.

GILIO A. (1988), *Su una condizione sufficiente di coerenza per le probabilità condizionate.* Atti del XII Convegno A.M.A.S.E.S., Palermo , 14-16 Settembre, 467-483.

GILIO A. (1990), *Criterio di penalizzazione e condizioni di coerenza nella valutazione soggettiva della probabilità*, Bollettino U.M.I., Vol. *4-B*, n. 3, Serie 7, 645-660.

GILIO A. (1989), *Probabilità condizionate* C_0 *-coerenti*, Rendiconti di Matematica, Serie VII, Vol *9*, Roma, 277-295.

HOLZER S. (1984), *Sulla nozione di coerenza per le probabilità subordinate*, Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste *16*, 46-62.

HOSIASSON e LINDENBAUM J. (1940), *On confirmation*, The Journal of Symbolic Logic *5*, 133-148.

KRAUSS P.H. (1968), *Representation of conditional probability measures on Boolean algebras*, Acta Math.Acad. Sci. Hungar. *19*, 229-241.

LEHMAN R.S. (1955), *On confirmation and rational betting*, The Journal of Symbolic Logic *20*, 251-262.

MAZURKIEWICZ S. (1932), *Zur Axiomatik der Warscheinlichkeitsrechnung*, C.R. Soc. Sci. Lett. Varsovie III, *25*, 1-4.

REGAZZINI E. (1983), *Sulle probabilità coerenti nel senso di de Finetti*, Editrice CLUEB Bologna.

RÉNYI A. (1955), *On a new axiomatic theory of probability*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. *6*, 285-335.

RIGO P. (1988), *Un teorema di estensione per probabilità condizionate finitamente additive*, Atti della XXXIV Riunione Scientifica della S.I.S., Siena, *2-1*, 27-34.

SCOZZAFAVA R.e GILIO A. (1989), *Coerenza di probabilità condizionate realizzate mediante pseudodensità*, Metron, Vol. XLVII, n. 1-4.

WILLIAMS P.M. (1975), *Notes on conditional previsions*, School of Mathematical and Physical Sciences, University of Sussex.