SULLA SOLIDIFICAZIONE DI UN LIQUIDO BENE AGITATO (*)

di V. de RIENZO e A. MESSINA (a Bari) (**)

SOMMARIO. - *Si studia un problema unidimensionale a frontiera libera per la diffusione di calore con cambio di fase. Il relativo teorema di esistenza ed unicità della soluzione é basato sull'uso di un operatore contrattivo. Si prova inoltre la dipendenza continua della soluzione dai dati iniziali e al contorno*

SUMMARY. - *A one dimensional free boundary problem of heat diffusion, with phase change, is considered. The relative theorem of the existence and uniqueness of solution is based on the use of a contracting map. Furthermore, the continuous dependence of the solution on the initial and boundary data is proved*

1. Introduzione, modello, ipotesi sui dati.

In questo lavoro affronteremo un problema unidimensionale di propagazione di calore in presenza di cambiamento di fase con la condizione di "buona agitazione" della fase liquida. Presso la superficie di separazione tra le due fasi si produce uno "strato limite" di raccordo tra la temperatura sul fronte di solidificazione, che assumeremo uguale a zero, e la temperatura $v > 0$ della fase agitata. Oltre al campo termico nella fase solida sono da determinarsi il suo spessore s e la temperatura v come funzioni del tempo t. Un problema di questo genere è stato affrontato in [1]. Il modello che verrà qui affrontato è però notevolmente più complesso. Si troverà una condizione di frontiera libera dipendente dalla storia della frontiera stessa. Problemi simili, in un diverso contesto, sono stati affrontati in [2] e [3]; tuttavia il caso presente viene meglio affrontato con tecniche differenti da quelle utilizzate nei suddetti lavori.

(*) Pervenuto in Redazione il 15 settembre 1989.
(**) Indirizzo degli Autori: Dipartimento di Matematica – Università degli Studi di Bari – Via G. Fortunato – 70100 Bari (Italy).

Diciamo $u(x,t)$ la temperatura del solido, che, all'istante t, occupa lo strato $0 < x < s(t)$ e $v(t)$ la temperatura del liquido, che occupa lo strato $s(t) < x < 1$. Dopo aver normalizzato ad 1 i coefficienti termici e adimensionalizzato le variabili, calcoliamo l'energia termica contenuta in un cilindro di base unitaria, con generatrici parallele all'asse x, al tempo t:

$$\int_0^{s(t)} u(x,t)\,dx + v(t)(1 - s(t)) + \lambda(1 - s(t)) \tag{1.1}$$

dove λ è una costante positiva adimensionale associata al calore latente e dove si è tenuto conto che:

i) nella fase liquida all'energia dovuta alla capacità termica si aggiunge quella dovuta al calore latente;

ii) lo spessore dello strato limite si suppone trascurabile.

Se non vi è scambio di calore alla parete $x = 1$, la differenza tra l'energia termica (1.1) con quella all'istante iniziale è dovuta al flusso di calore $-u_x(0,t)$ attraverso la parete $x = 0$.
Abbiamo quindi l'uguaglianza:

$$\begin{aligned}\int_0^{s(t)} u(x,t)\,dx + v(t)(1 - s(t)) + \lambda(1 - s(t)) + \\ -\left\{ \int_0^{s(0)} u_0(x)\,dx + v(0)(1 - s(0)) + \right. \\ \left. +\lambda(1 - s(0)) \right\} = -\int_0^t u_x(0,\tau)\,d\tau\end{aligned} \tag{1.2}$$

e derivando rispetto al tempo otteniamo una relazione che esprime il bilancio termico complessivo al tempo t:

$$u_x(s(t),t) + \frac{d}{dt}[v(t)(1 - s(t))] - \lambda\dot{s}(t) = 0\ . \tag{1.3}$$

La condizione di bilancio termico all'interfase in presenza dello "strato limite" si scrive:

$$[\lambda + v(t)]\,\dot{s}(t) = -\alpha v(t) + u_x(s(t),t) \tag{1.4}$$

dove $\lambda + v(t)$ esprime il salto di energia termica attraverso l'interfase e il secondo membro esprime invece il salto di flusso termico (la costante α essendo legata allo spessore dello strato limite).

Dalle (1.3), (1.4) si ricava

$$\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = -\frac{\alpha}{1-s(t)}, \quad v(0) = v_0 \geq 0 \tag{1.5}$$

e quindi

$$v(t) = v_0 \exp\left[-\int_0^t \frac{\alpha}{1-s(\tau)} d\tau\right] . \tag{1.6}$$

In conclusione il problema ha la seguente formulazione:

$$u_{xx} - u_t = 0 \quad \text{in} \quad D_T \equiv \{(x,t) : 0 < x < s(t),\ 0 < t < T\} , \tag{1.7}$$

$$s(0) = b , \quad 0 < b < 1 , \tag{1.8}$$

$$u(x,0) = h(x) \leq 0 , \quad 0 \leq x \leq b , \tag{1.9}$$

$$u(0,t) = \varphi(t) \leq 0 , \quad 0 < t < T , \tag{1.10}$$

$$u(s(t),t) = 0 , \quad 0 < t < T , \tag{1.11}$$

$$\dot{s}(t) = \frac{u_x(s(t),t) - \alpha v(t)}{\lambda + v(t)}, \ 0 < t < T \text{ con } v(t) \text{ data dalla } (1.6) . \tag{1.12}$$

Chiameremo *soluzione* del problema (1.7)–(1.12) in $(0,T)$ la coppia $(s(t), u(x,t))$ soddisfacente (1.7)–(1.12) e tale che:

- $0 < s(t) < 1$ in $(0,T)$,
- $s(t)$ è derivabile in $(0,T)$ e continua in $[0,T]$,
- $u(x,t)$ è continua in $\bar{D}_T$ eccetto un numero finito di discontinuità su $x = 0$ e $t = 0$ dove entrambi i limiti lim inf $u(x,t)$ e lim sup $u(x,t)$ sono limitati,

– $u_x(x,t)$ è continua per $0 < x \leq s(t), 0 < t < T$,
– u_{xx}, u_t continue in D_T.

Sui dati assumeremo che:

$$h(x) \in C^0([0,b]), \quad h(b) = 0; \tag{1.13}$$

$$-H(b-x) \leq h(x) \leq 0 \text{ per qualche costante } H > 0; \tag{1.14}$$

$$\varphi(t) \text{ continua a tratti e } -\Phi \leq \varphi(t) \leq -a < 0, \ \forall t, \text{ con} \tag{1.15}$$

$$\Phi \geq a > 0 .$$

Inoltre sceglieremo H in modo che risulti

$$Hb \geq \Phi . \tag{1.16}$$

Nel par. 2 proveremo un teorema di esistenza ed unicità con un metodo di punto fisso. I risultati che troveremo in 2a (lipschitzianità della $s(t)$) e in 2b (limitatezza inferiore della $s(t)$) garantiranno che l'unico caso di non esistenza globale si avrà quanto esiste t^* tale che $\lim_{t \to t^*} s(t) = 1$. Completeremo il lavoro con la dimostrazione della dipendenza continua della soluzione dai dati e dal contorno e con lo studio del caso in cui la fase solida è a zero gradi, per il quale si può ottenere la soluzione esplicita. L'ultimo paragrafo è dedicato ad alcune stime asintotiche.

2. Teorema di esistenza ed unicità.

Dimostreremo il seguente teorema

TEOREMA 2.1. *Nelle ipotesi del paragrafo precedente esiste T^* dipendente dai dati tale che, per $T < T^*$ il problema (1.7)–(1.12) ammette una ed una sola soluzione. Inoltre o $T^* = +\infty$ oppure $s(T^*) = 1$.*

Premettiamo alcune stime a priori.

2a. *Lipschitzianità della s(t).*

Sfruttando le ipotesi sui dati, dal principio di massimo si deduce che $u_x(s(t),t) > 0$ e quindi dalla (1.12) si ottiene una limitazione inferiore per $\dot{s}(t)$:

$$\dot{s}(t) \geq -\frac{\alpha v(t)}{\lambda + v(t)} > -\frac{\alpha v_0}{\lambda} \equiv -B, \quad B > 0, \quad t \in (0,T) \tag{2.1}$$

in quanto $v(t)$ è limitata e positiva.

Scelto T in modo che risulti $\min\limits_{0<t<T} s(t) > 0$, in quanto $s(t) > b - Bt$, nell'intervallo di tempo $(0,T)$ consideriamo la trasformazione:

$$\xi = x + Bt, \ \tau = t, \ \bar{s}(\tau) = s(\tau) + B\tau ,$$

$$\bar{u}(\xi,\tau) = u(\xi - B\tau, \tau) .$$

La funzione $\bar{u}(\xi,\tau)$ è tale che:

$$\bar{u}_{\xi\xi} - B\bar{u}_\xi - \bar{u}_\tau = 0, \quad B\tau < \xi < \bar{s}(\tau), \quad 0 < \tau < T , \tag{2.2}$$

$$\bar{u}(\xi,0) = h(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq b , \tag{2.3}$$

$$\bar{u}(B\tau,\tau) = \varphi(\tau), \quad 0 < \tau < T , \tag{2.4}$$

$$\bar{u}(\bar{s}(\tau),\tau) = 0, \quad 0 < \tau < T . \tag{2.5}$$

Consideriamo ora la funzione

$$\omega(\xi,\tau) = -C(\bar{s}(\tau) - \xi)(2\bar{b} + \xi - \bar{s}(\tau)) \tag{2.6}$$

nel dominio

$$\Delta = \{(\xi,\tau) : \bar{s}(\tau) - \bar{b} < \xi < \bar{s}(\tau), \quad 0 < \tau < T\} , \tag{2.7}$$

dove

$$\bar{b} = \min\{\min_{0\leq t\leq T} s(t), \ 1/B\} > 0 \tag{2.8}$$

e

$$C = Hb/\bar{b}^2 \; . \tag{2.9}$$

La funzione $\omega(\xi,\tau)$ soddisfa in Δ il seguente problema

$$\begin{cases} \omega_{\xi\xi} - B\omega_\xi - \omega_\tau = 2C\{1 + \dot{\bar{s}}(\tau)(\xi - \bar{s}(\tau) + \bar{b})\} + \\ \qquad -2BC(\bar{b} - \bar{s}(\tau) + \xi) \; , \\ \omega(\bar{s}(\tau),\tau) = 0 \; , \\ \omega(\xi,0) = -C(b-\xi)(2\bar{b} + \xi - b) \; , \\ \omega(\bar{s}(\tau) - \bar{b},\tau) = -C\bar{b}^2 \end{cases} \tag{2.10}$$

e in tale dominio

$$\omega(\xi,\tau) \le \bar{u}(\xi,\tau) \le 0 \tag{2.11}$$

in quanto per le ipotesi fatte accade:

$$\begin{cases} 2C\{1 + \dot{\bar{s}}(\tau)(\xi - \bar{s}(\tau) + \bar{b})\} - 2BC(\bar{b} - \bar{s}(\tau) + \xi) > 0 \; , \\ -C(b-\xi)(2\bar{b} + \xi - b) \le -H(b - x) \; , \\ -C\bar{b}^2 \le -Hb \; . \end{cases} \tag{2.12}$$

Ma $\bar{u}(\bar{s}(\tau),\tau) = \omega(\bar{s}(\tau),\tau) = 0$ e quindi:

$$\bar{u}_\xi(\bar{s}(\tau),\tau) \le \omega_\xi(\bar{s}(\tau),\tau)$$

ovvero

$$u_x(s(t),t) \le \omega_\xi(\bar{s}(\tau),\tau) = 2Hb/\bar{b} \; . \tag{2.13}$$

Conoscendo quindi una limitazione inferiore per $\dot{s}(t)$ abbiamo dedotto una limitazione superiore per $u_x(s(t),t)$ anche nei tratti in cui $\dot{s}(t)$ è negativo. Tenendo conto della (2.13) e della (1.12) troviamo una limitazione superiore anche per $\dot{s}(t)$:

$$-\frac{\alpha v_0}{\lambda} \le \dot{s}(t) \le \frac{2Hb}{\lambda\bar{b}}$$

e quindi la lipschitzianità della $s(t)$ con coefficiente

$$A \le \max\left\{\frac{\alpha v_0}{\lambda}, \frac{2Hb}{\lambda\bar{b}}\right\} \; . \tag{2.14}$$

Il risultato raggiunto in questo paragrafo permette già di escludere casi in cui la soluzione di (1.7)–(1.12) cessa di esistere dopo un tempo finito, e prima che la frontiera libera possa aver raggiunto gli estremi zero o uno, a causa di una singolarità di $\dot{s}(t)$. Troveremo nel prossimo paragrafo una limitazione inferiore per $s(t)$, e quindi concluderemo che l'unico caso di non esistenza globale si ha quando, per un qualche t, $s(t)$ tende ad uno (v. Oss.1).

2b. *Limitazione inferiore della s(t).*

Le ipotesi fatte sui dati, più precisamente le (1.15), (1.16) assicurano l'esistenza di una costante $\mu_0 < b$ tale che $h(x) \leq \frac{a}{\mu_0}(\mu_0 - x)$ per $0 \leq x \leq \mu_0$. Se $s(t)$ assume un valore $\mu < \mu_0$ esisterà un primo istante t^* tale che $s(t^*) = \mu$; ovviamente $\dot{s}(t^*) \leq 0$.

Consideriamo nel dominio $\Delta^* = \{(x,t) : 0 \leq x \leq s(t),\ 0 \leq t \leq t^*\}$ la funzione

$$w(x,t) = \frac{a}{\mu}(\mu - x) + u(x,t);$$

essa soddisfa il seguente problema

$$w_{xx} - w_t = 0 \text{ in } \Delta^* ,$$

$$w(x,0) = \frac{a}{\mu}(\mu - x) + h(x) < 0 ,$$

$$w(0,t) = a + \varphi(t) < 0 ,$$

$$w(s(t),t) = \frac{a}{\mu}(\mu - s(t)) < 0 .$$

Possiamo allora dedurre $w(x,t) < 0$ in Δ^* e poichè $w(s(t^*),t^*) = 0$ si ha $w_x(s(t^*),t^*) \geq 0$ e quindi $u_x(s(t^*),t^*) \geq \frac{a}{\mu}$.

Dalla (1.12) deduciamo infine:

$$\dot{s}(t) \geq \frac{a/\mu - \alpha v_0}{\lambda + v_0}$$

quantità che per $\mu > \mu_0 = a/\alpha v_0$ è certamente maggiore (stretto) di zero.

La contraddizione deriva dal fatto che $s(t)$ non può assumere valori più piccoli di un determinato μ.

2c. *Riformulazione integrale della condizione di frontiera libera.*

Supponiamo che la coppia $(s(t), u(x,t))$ soddisfi il problema (1.7)–(1.12) in $(0, T)$ e consideriamo l'identità di Green applicata alla coppia $u(x,t)$, $\nu(x) = x$ nel dominio $\Omega_t = \{(x,\tau) : 0 < x < s(\tau), 0 < \tau \leq t\}$:

$$\iint_{\Omega_t} (\nu Lu - uM\nu)\, dx d\tau = \oint_{\partial\Omega_t} [u\nu dx + (\nu u_x - u\nu_x) d\tau]$$

dove L indica l'operatore $(\partial^2/\partial x^2 - \partial/\partial\tau)$ ed M quello aggiunto.

Nel nostro caso la riformulazione integrale della condizione (1.12) è la seguente

$$\alpha \int_0^t \frac{s(\tau)v(\tau)(2 - s(\tau))}{2(1 - s(\tau))} d\tau = \frac{1}{2}[b^2(\lambda + v_0) - s^2(t)(\lambda + v(t))] +$$

$$(2.15) \quad - \int_0^b x h(x)\, dx + \int_0^{s(t)} x u(x,t)\, dx - \int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau, \quad 0 < t \leq T.$$

Viceversa se la coppia $(s(t), u(x,t))$ soddisfa (1.7)–(1.11), (2.15) con $s(t)$ lipschitziana ed $u_x(x,t)$ continua fin sul contorno $s(t)$ allora essa è soluzione del problema (1.7)–(1.12). Ciò si dimostra con tecniche oramai classiche [4].

3. Definizione dell'operatore $\mathcal{T}(s(t)) = \tilde{s}(t)$.

Definito il seguente insieme $X(T_0, A_0)$, con T_0 ed A_0 costanti positive da determinare, delle funzioni $s(t)$ definite in $[0, T_0]$, lipschitziane con coefficiente $A \leq A_0$

$$(3.1) \qquad X(T_0, A_0) = \{s(t) : t \in [0, T_0], s(0) = b,$$

lipsch. con coeff. $A \leq A_0$, $\max\limits_{0<t<T_0} s(t) < 1\}$,

per un'assegnata $s(t) \in X(T_0, A_0)$ risolviamo il seguente problema, che per le ipotesi fatte ammette una ed una sola soluzione:

$$(3.2) \qquad \begin{cases} u_{xx} - u_t = 0 & \text{in } D_T, \\ u(x,0) = h(x), & 0 < x < b, \\ u(0,t) = \varphi(t), & 0 < t < T, \\ u(s(t),t) = 0, & 0 < t < T. \end{cases}$$

Quindi dalla (2.15) determiniamo la funzione $\tilde{s}(t)$

$$\tilde{s}^2(t) = \frac{1}{\lambda + v(t)} \left\{ b^2(\lambda + \dot{v_0}) - 2\alpha \int_0^t \frac{s(\tau)v(\tau)(2 - s(\tau))}{2(1 - s(\tau))} d\tau + \right.$$

$$\left. -2 \int_0^b xh(x)\,dx + 2 \int_0^{s(t)} xu(x,t)\,dx - 2 \int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau \right\}, \tag{3.3}$$

con cui ripartire nel procedimento descritto. Resta cosi definito un operatore $\mathcal{T}$ che dimostreremo essere una contrazione in un opportuno intervallo temporale. Chiaramente ogni punto fisso di $\mathcal{T}$ fornisce una soluzione del problema. Intanto è immediata la verifica che $\tilde{s}(0) = b$, sfruttando la (3.3).

3a. *Lipshitzianità della* $\tilde{s}(t)$.

Dimostreremo che esistono due costanti $A_0 > \frac{2H}{\lambda}$ e $T_0 < \frac{b}{A_0}$ tali che

$$\mathcal{T}(X(T_0, A_0)) \subseteq X(T_0, A_0) . \tag{3.4}$$

Consideriamo il problema per una $\bar{v}(x,t)$ con $s(t)$ nell'insieme $X(T_0, A_0)$:

$$\begin{cases} \bar{v}_{xx} - \bar{v}_t = 0 & \text{in } D_T, \text{ con } T < T_0 , \\ \bar{v}(x,0) = -H(b-x), & 0 \le x \le b , \\ \bar{v}(0,t) = -Hb, & 0 < t < T , \\ \bar{v}(s(t),t) = 0, & 0 < t < T , \end{cases} \tag{3.5}$$

esso, per le ipotesi fatte, possiede un'unica soluzione $\bar{v}(x,t)$ che è tale:

$$\bar{v}(x,t) \le u(x,t), \text{ in } D_T \tag{3.6}$$

e

$$u_x(s(t),t) \le \bar{v}_x(s(t),t), \; 0 < t < T . \tag{3.7}$$

Usando ora le formule di Green e di Neuman per il semispazio dopo aver dato una rappresentazione integrale della soluzione del problema (3.5) della $\bar{v}(x,t)$, abbiamo

$$\bar{v}_x(s(t),t) = 2H \int_0^b N(s(t),t;\xi,0)\,d\xi + \tag{3.8}$$

$$+2 \int_0^t \bar{v}_x(s(\tau),\tau) G_x(s(t),t;\ s(\tau),\tau)\,d\tau\,.$$

Poichè $s(t) \in X(T_0, A_0)$ ed è quindi lipschitziana in $[0,T]$ con coefficiente $A < A_0$, abbiamo

$$|s(t) - b| \leq AT \quad \text{con} \quad b - AT > 0 \quad \text{per la 2b}\ ,$$

e dalla (3.8) deduciamo:

$$\bar{v}_x(s(t),t) \leq 2H + \left[\frac{A}{2\sqrt{\pi}} + \frac{1}{e\sqrt{\pi}}\frac{1}{b-AT}\right] \int_0^t \frac{v_x(s(\tau),\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau\,.$$

Utilizzando una notevole diseguaglianza integrale dimostrata in [5], per la (3.7) abbiamo:

$$u_x(s(t),t) \leq 2H\left\{1 + \left[A + \frac{2}{e(b-AT)}\right]\sqrt{\frac{T}{\pi}}\right\}\cdot$$

$$\cdot \exp\left\{T\left[\frac{A}{2} + \frac{1}{e(b-AT)}\right]^2\right\}\,.$$

Ora, assegnata la $s(t)$ in $[0,T]$ con coefficiente di Lipschitz A, per provare la lipschitzianità della $\bar{s}(t)$ dimostreremo la limitatezza della $|\dot{\bar{s}}|$; dalla (3.3), essendo $v(t)$ limitata e positiva, abbiamo:

$$|\dot{\bar{s}}| \leq \frac{2H}{\lambda}\left\{1 + \left[A + \frac{2}{e(b-AT)}\right]\sqrt{\frac{T}{\pi}}\right\}\cdot \tag{3.9}$$

$$\cdot \exp\left\{T\left[\frac{A}{2} + \frac{1}{e(b-AT)}\right]^2\right\}\,.$$

Dallo studio della funzione $F(A,T;H,b)$ al secondo membro della (3.9) notiamo che esiste un solo T (che indicheremo con T_0) tale che l'equazione $F(A,T_0;H,b) = A$ possiede un'unica soluzione (che indicheremo con A_0): $F(A_0,T_0;H,b) = A_0$ e quindi

$$|\dot{\bar{s}}| \leq A_0, \quad 0 < t \leq T_0 \ \text{ovvero la lipschitzianità della } \bar{s}(t)\,. \tag{3.10}$$

Altre proprietà della funzione $F(A,T;H,b)$ comportano

$$A_0 > \frac{2H}{\lambda} \tag{3.11}$$

e dalla lipschizianità della $\tilde{s}(t)$ deduciamo una stima superiore per T_0:

$$T_0 < b/A_0 \ . \tag{3.12}$$

Resta quindi dimostrato un teorema di esistenza.

3b. *Contrattività dell'operatore $\mathcal{T}$.*

Assegnate due funzioni $s_1(t)$ ed $s_2(t)$ nell'insieme $X(A_0,T_0)$ consideriamo i seguenti problemi nello stesso intervallo di tempo $(0,T)$ con $T \le T_0$ ed $i = 1,2$:

$$\begin{cases} u_{ixx} - u_{it} = 0 & \text{in } D_T\{(x,t) : 0 < x < s_i(t), \\ & 0 < t < T \le T_0\}, \\ u_i(x,0) = h(x), & 0 \le x \le s_i(0) = b \text{ con } 0 < b < 1 \ , \\ u_i(0,t) = \varphi(t), & 0 < t < T \ , \\ u_i(s_i(t),t) = 0, & 0 < t < T \ . \end{cases} \tag{3.13}$$

Posto

$$\delta(t) = |s_1(t) - s_2(t)|, \quad ||\delta|| = \max_{0<\tau<t} |\delta(\tau)|$$

e tenendo conto che $s(t)$ è limitata inferiormente (par.2b) e che quindi

$$|\mathcal{T}s_1 - \mathcal{T}s_2| = |\tilde{s}_1 - \tilde{s}_2| \le \frac{|\tilde{s}_1^2 - \tilde{s}_2^2|}{2(b - A_0T_0)} \ ,$$

utilizzando la (3.3) otteniamo:

$$|\tilde{s}_1 - \tilde{s}_2| \le \frac{1}{2\lambda^2(b - A_0T_0)} \Big[I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + |b^2(\lambda + v_0) + \tag{3.14}$$

$$+2\int_0^b xh(x)dx + 2\int_0^t \varphi(\tau)d\tau||v_2(t) - v_1(t)| \Big]$$

con

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \alpha\lambda \left| \int_0^t \frac{s_2(\tau)v_2(\tau)(2-s_2(\tau))}{1-s_2(\tau)}d\tau + \right. \\
&\qquad \left. - \int_0^t \frac{s_1(\tau)v_1(\tau)(2-s_1(\tau))}{1-s_1(\tau)}d\tau \right| , \\
I_2 &= 2\lambda \left| \int_0^{s_1(t)} x u_1(x,t)\,dx - \int_0^{s_2(t)} x u_2(x,t)\,dx \right| , \\
I_3 &= \alpha \left| v_1(t) \int_0^t \frac{s_2(\tau)v_2(\tau)(2-s_2(\tau))}{1-s_2(\tau)}d\tau + \right. \\
&\qquad \left. - v_2(t) \int_0^t \frac{s_1(\tau)v_1(\tau)(2-s_1(\tau))}{1-s_1(\tau)}d\tau \right| , \\
I_4 &= 2 \left| v_2(t) \int_0^{s_1(t)} x u_1(x,t)\,dx - v_1(t) \int_0^{s_2(t)} x u_2(x,t)\,dx \right| .
\end{aligned}
$$

Per la stima dell'integrale I_1, osserviamo che, poichè $s_1(t)$ e $s_2(t)$ appartengono all'insieme $X(T_0, A_0)$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $1 - s_i(t) > \varepsilon$, $i = 1,2$ e quindi

$$
|v_2(t) - v_1(t)| \leq \frac{\alpha v_0 T_0}{\varepsilon^2} |\delta||_t . \tag{3.15}
$$

Tenendo poi conto anche della lipshitzianità di $s(t)$, si trova:

$$
I_1 \leq C_1(T_0)||\delta||_t ,
$$

con

$$
\begin{aligned}
C_1(T_0) &= \frac{\alpha\lambda}{\varepsilon^2}\left\{ \frac{\alpha v_0}{\varepsilon^2} \Big[2(b + A_0T_0) + 3(b + A_0T_0)^2 + \right. \\
&\left. +(b + A_0T_0)^3 \Big] T_0^2 + v_0T_0[2 + 2(b + A_0T_0) + (b + A_0T_0)^2] \right\} .
\end{aligned}
$$

Per poter stimare I_2, consideriamo ancora la funzione $\bar{v}(x,t)$, soluzione del problema (3.5), e studiamo il problema per la $|\bar{v}_x(x,t)|$ in D_{T_0} per una $s(t)$ scelta in $X(T_0, A_0)$.

Per il principio di massimo $|\bar{v}_x(x,t)|$ è limitata, indipendentemente dalla $s(t)$; cioè esiste H_0, funzione dei dati ed in particolare di μ_0, tale che $|\bar{v}_x(x,t)| \leq H_0$ e quindi

$$
|u(x,t)| \leq H_0(s(t) - x) \text{ in } D_{T_0} . \tag{3.16}
$$

Segue, procedendo come in [6]

$$I_2 \leq C_2(T_0)||\delta||_t ,$$

con

$$C_2(T_0) = \frac{4\lambda H_0}{\sqrt{\pi}}(b + A_0 T_0) \exp\left(\frac{A_0^2 T_0}{4}\right)\left(1 + \frac{A_0\sqrt{T_0}}{\sqrt{\pi}}\right)\sqrt{T_0} .$$

Per I_3, dopo semplici calcoli, si trova:

$$I_3 \leq C_3(T_0)||\delta||_t ,$$

con

$$C_3(T_0) = \frac{\alpha v_0^2}{\varepsilon^2}[2(1 + b + A_0 T_0) + (b + A_0 T_0)^2]T_0 .$$

Infine, si stima I_4, utilizzando ancora le tecniche impiegate in [6]:

$$I_4 \leq C_4(T_0)||\delta||_t ,$$

con

$$C_4(T_0) = 2\frac{\alpha v_0}{\varepsilon^2}\left(\Phi T_0 + \frac{H b^3}{2}\right)T_0 + \frac{v_0}{\lambda}c_2(T_0) .$$

Posto poi

$$C_0(T_0) = \frac{\alpha v_0}{\varepsilon^2}\left[b^2(\lambda + v_0) + 2\Phi T_0 + H b^3\right]T_0$$

e tenendo conto delle stime sopra trovate si ha:

$$||\tilde{s}_1 - \tilde{s}_2||_t \leq C(T_0)||\delta(t)||_t ,$$

con

$$C(T_0) = \frac{1}{2\lambda^2(b - A_0 T_0)}[C_0(T_0) + C_1(T_0) + C_2(T_0) +$$

$$+ C_3(T_0) + C_4(T_0)] ,$$

funzione continua di T_0, tendente a zero linearmente con T_0; è possibile allora trovare un T^* per cui, se T_0 è minore di T^*, risulta $C(T_0) < 1$ e quindi la trasformazione $\mathcal{T}$, definita nel paragrafo 3, è una contrazione.

Per concludere la dimostrazione del Teorema 2.1 osserviamo che la soluzione potrà essere prolungata oltre T_0 grazie alla (3.16), nella quale H_0 dipende solo dai dati, finchè eventualmente non si verifichi che $s(T^*) = 1$ per qualche T^*.

Concludiamo questo paragrafo con le seguenti osservazioni.

OSSERVAZIONE 1. I risultati raggiunti permettono di dedurre che l'unico caso di non esistenza globale, si ha quando sussistendo la lipschitzianità della $s(t)$, $\exists t^*$ tale che $\lim_{t \to t^{*-}} s(t) = 1$.

In questo caso $\int_0^{t^*} \frac{1}{1-s(t)} dt$ è divergente; infatti, sempre per la lipschitzianità della $s(t)$, per qualche $\lambda > 0$: $s(t) > 1 - \lambda(t^* - t)$ e quindi $v(t)$ tende a zero per $t \to t^*$.

OSSERVAZIONE 2. Poichè l'operatore $\mathcal{T}$ è sempre una contrazione in opportuni intervalli $(0, T^*)$ qualunque sia la famiglia di dati ed è rispetto ad essi continuo, ne consegue la dipendenza continua della soluzione del problema (1.7)–(1.12) dai dati e dal contorno applicando il Teorema 1. XVI di [7].

4. Caso particolare (fase solida a zero gradi).

Nel caso in cui $u(x,t) \equiv 0$ dalla relazione (1.12) troviamo

$$\dot{s}(t) = -\frac{\alpha v(t)}{\lambda + v(t)} < 0 \tag{4.1}$$

ed è possibile trovare l'equazione differenziale per $v(t)$; infatti derivando due volte rispetto al tempo l'espressione di $v(t)$ e tenendo conto della (4.1) otteniamo

$$\ddot{v}(t) = \left[\frac{1}{v(t)} + \frac{1}{\lambda + v(t)}\right] \dot{v}^2 \tag{4.2}$$

con le condizioni iniziali:

$$v(0) = v_0 \,, \ \dot{v}(0) = -\frac{\alpha v_0}{1-b} \,. \tag{4.3}$$

La (4.2) ammette come soluzione

$$v(t) = \lambda v_0 / [(v_0 + \lambda) e^{Bt} - v_0] \,, \tag{4.4}$$

con

$$B = \lambda\alpha/(1-b)(\lambda + v_0) > 0 \,.$$

D'altra parte dall'espressione di $\dot{v}(t)$ otteniamo

$$s(t) = 1 + \frac{\alpha v(t)}{\dot{v}(t)}$$

e per la (4.4) abbiamo:

$$s(t) = v_0(1-b)(e^{-Bt} - 1)/\lambda + b \,. \tag{4.5}$$

Come si nota il contorno è retrogrado e tende asintoticamente al valore $b - v_0(1-b)/\lambda$.

5. Stime asintotiche.

Premettiamo che per l'esistenza del limite $\lim\limits_{t\to+\infty} s(t) = s_\infty < 1$ è necessario che $\int_0^\infty \varphi(t)\,dt$ sia covergente. Ciò consegue dalla (2.15), assumendo che se tale limite esiste $v(t) \to 0$ esponenzialmente e che tutti i limiti non contenenti φ risultano limitati.

Una peculiarità del problema in esame, legata al fatto che l'evoluzione della frontiera libera dipende dalla storia precedente, risiede nel fatto che la conoscenza di $\int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau$ non è in generale sufficiente per la determinazione di un valore asintotico di $s(t)$. Ciò si spiega richiamando il bilancio termico (1.2), il quale consente un semplice studio asintotico se è nota la quantità di calore complessivamente scambiata con l'esterno. Quando però è assegnata su $x = 0$ la temperatura, la suddetta quantità non risulta univocamente legata al valore di $\int_0^\infty \varphi(t)\,dt$.

È tuttavia possibile ottenere dei risultati generali nei casi estremi $\alpha \to 0$, $\alpha \to \infty$.

Per $\alpha \to 0$ il problema si riduce banalmente ad un problema di Stefan ad una fase con un calore latente apparente $\lambda + v_0$.

Nel secondo caso basta osservare che il primo termine nella (2.15) si può riscrivere nella forma

$$\frac{1}{2}\alpha v_0 \int_0^{\theta(t)} s(2-s)e^{-\alpha\theta}d\theta \quad \text{con} \quad \theta(\tau) = \int_0^\tau \frac{1}{1-s(\eta)}d\eta$$

e per $\alpha \to \infty$ si riduce a $\frac{1}{2}v_0 b(2-b)$. Per l'eventuale valore asintotico s_∞ si ottiene allora (con l'ipotesi $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$) l'equazione

$$\lambda s_\infty^2 = \lambda b^2 - 2bv_0(1-b) - \int_0^b xh(x)\,dx - \int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau\,,$$

col vincolo $0 < s_\infty < 1$.

BIBLIOGRAFIA

[1] PRIMICERIO M., *Sur une classe de problèmes du type de Stefan*, Annuaire Univ. Sofia, Fac. Phys. *63* (1969), 83-90.

[2] FASANO A. e PRIMICERIO M., *Viscoplastic impact of a rod on a wall*, Bollettino UMI *4* II, Suppl. fasc. 3 (1975), 531-553.

[3] FASANO A. e PRIMICERIO M., *Free boundary problems for non linear parabolic equations with non linear free boundary conditions*, Journal of mathematical analysis and applications *72* (1979), 247-273.

[4] CANNON J.R. e HILL C.D., *Existence, uniqueness, stability, and monotone dependence in a Stefan problem for the heat equation*, Journal of Mathematics and Mechanics *17*, 1 (1967), 1-19.

[5] CANNON J.R., *A priori estimates for continuation of the solution of the heat equation in the space variable*, Ann. Mat. Pura Applic. IV, *65* (1964), 377-387.

[6] FASANO A. e PRIMICERIO M., *General free-boundary problems for the heat equations*, Journal of Mathematical analysis and applications, *57* (1977), 694-723.

[7] KANTROVICH L.V. e AKILOV G.P., *Functional analysis in normed spaces*, Pergamon Press, (1964).

[8] FRIEDMAN A., *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice Hall Inc., (1964).

[9] LADYZENSKAYA O.A., SOLONNILOV V.A. e URAL-CEVA N.U., *Linear and quasi linear equations of parabolic type*, A.M.S. Translations, Vol. 23, Providence, Rhode Island, (1968).