UNA FORMULAZIONE GENERALE DI UN TEOREMA DI LUSIN (*)

di LUIGI ALBANO (a Bari) (**).

SOMMARIO. - *Si dimostra una estensione di un noto teorema dovuto a* LUSIN.

SUMMARY. - *Here it is proved an extension of a known theorem due to* LUSIN.

Un classico teorema di LUSIN afferma che *ogni funzione reale, di una variabile reale, misurabile, è la derivata, quasi ovunque, di una funzione reale, di una variabile reale, continua.*

In questa nota il risultato ora ricordato viene esteso al caso in cui, nell'insieme R dei numeri reali, anziché esserci la misura di LEBESGUE, vi è una misura, definita sull'insieme degli intervalli di R, che si annulla su ogni parte finita di R.

Siano: $\mathcal{G}$ la *famiglia generatrice* costituita dagli intervalli superiormente semiaperti su $[0, 1]$ e μ una *misura finita* su $\mathcal{G}$ (1).

Nel seguito indicheremo con $\mathcal{L}$ il *μ-completamento* del *σ-reticolo complementato generato da $\mathcal{G}$*, denoteremo ancora con lo stesso simbolo μ il *prolungamento numerabilmente additivo* di μ su $\mathcal{L}$, e, come è d'

(*) Pervenuto in Redazione il 15 giugno 1979.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica Finanziaria della Facoltà di Economia e Commercio dell'Università-Largo Fraccacreta - 70100 Bari.

(1) Se S è un insieme non vuoto e $\mathcal{G}$ è un insieme non vuoto di parti di S, si dice che $\mathcal{G}$ è una famiglia generatrice (di parti di S), se per ogni coppia, (J', J''), di elementi di $\mathcal{G}$, $J' \cap J''$ e $J' - J''$ sono, ognuno, una unione finita o numerabile di elementi di $\mathcal{G}$ a due a due disgiunti.

Se $\mathcal{G}$ è una famiglia generatrice di parti di S, si dice misura finita su $\mathcal{G}$, ogni funzione reale, non negativa, definita in $\mathcal{G}$ ed ivi *numerabilmente additiva.*

uso, diremo *misurabili* gli elementi di $\mathcal{L}$, e, per ogni elemento X di $\mathcal{L}$, diremo *misura* di X il valore di μ in X.

Supporremo inoltre μ nulla su ogni parte finita di $[0, 1]$.

È ovvio che:

1. *Se $\mathcal{D}$ è una base di derivazione inclusa in $\mathcal{G}$, allora per ogni elemento J di $\mathcal{G}$ e per quasi ogni punto x di J, è incluso in J ogni elemento di $\mathcal{D}$ a cui x appartiene e di lunghezza sufficientemente piccola* (2).

Dimostriamo ora la seguente proposizione:

2. *Siano*: $[a, b]$ *un intervallo chiuso e di misura positiva incluso in* $[0, 1]$, *h un numero reale maggiore o uguale a tre e $\mathcal{D}$ una base di derivazione inclusa in $\mathcal{G}$.*

Esistono allora una parte non vuota e perfetta C di $[a, b]$ avente interno di misura nulla ed una misura finita su $\mathcal{G}$, w, continua in $[0, 1]$ (3) *e nulla su ogni elemento di $\mathcal{G}$ disgiunto da C, tali che*: $\mu(C) = \frac{h-3}{h-2}\mu([a, b])$, $w([a, b]) = \mu([a, b])$ *e* $Dw(x) = 0$ *per quasi ogni elemento x di* $[0, 1] - C$ (4).

---

(2) Se S è un insieme non vuoto, $\mathcal{G}$ è una famiglia generatrice di parti di S e μ è una misura finita su G, una parte non vuota $\mathcal{D}$ di $\mathcal{G}$, i cui elementi hanno misura positiva, si dice una base di derivazione (inclusa in $\mathcal{G}$), se esiste una funzione reale e crescente, detta *norma*, definita in $\mathcal{D}$ tale che, per quasi ogni punto x di S, esistono elementi di $\mathcal{D}$ a cui x appartiene e di norma piccola quanto si voglia. Se x è un elemento di S, si dice *convergente* ad x ogni successione di elementi di $\mathcal{D}$ a cui x appartiene e tale che sia infinitesima la successione delle norme dei suoi elementi.

Nel caso da noi preso in esame si è definita norma di un elemento I di $\mathcal{D}$ la lunghezza di I.

(3) Se S è un insieme non vuoto, $\mathcal{G}$ è una famiglia generatrice di parti di S, μ è una misura finita su $\mathcal{G}$, φ è una funzione reale, definita in $\mathcal{G}$ ed x è un punto di S, si dice che φ è *continua* in x, se per ogni numero reale positivo ε esiste un numero reale positivo η_x tale che $|\varphi(J)| < \varepsilon$ per ogni elemento J di $\mathcal{G}$ a cui x appartiene e di misura minore di η_x. La funzione φ si dice continua in S se è continua in ogni punto di S.

(4) Se S è un insieme non vuoto, $\mathcal{G}$ è una famiglia generatrice di parti di S, μ è una misura finita su $\mathcal{G}$, $\mathcal{D}$ è una base di derivazione inclusa in $\mathcal{G}$, φ è una funzione reale definita in $\mathcal{D}$ ed x è un punto di S tale che esistono successioni di elementi di $\mathcal{D}$ convergenti ad x, se indichiamo con δ la norma definita in $\mathcal{D}$, si dice che φ è derivabile in x, se esiste finito il $\lim\limits_{\delta(I) \to 0} \frac{\mu(I)}{\varphi(I)}$. Tale numero reale allora si chiama la *derivata* di φ in x e si denota col simbolo: $D\varphi(x)$.

DIM. Siano: a' e b' i due elementi di $[a, b]$ tali che: $\mu([a, a'])=$ $=\mu([b', b])=0$ e tali inoltre che abbia misura positiva ogni elemento di $\mathcal{G}$ incluso in $[a', b']$ ed avente in comune con $[a', b']$ almeno un estremo.

Sia quindi $\{J_{1,1}, I_{1,1}, J_{1,2}\}$ la partizione di $[a', b']$ costituita da tre intervalli tali che: $I_{1,1}$ sia aperto, ogni elemento di $J_{1,1}$ sia minore di ogni elemento di $J_{1,2}$, $\mu(J_{1,1})=\mu(J_{1,2})=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{h}\right)\mu([a, b])$ e, conseguentemente: $\mu(I_{1,1})=\frac{1}{h}\mu([a, b])$, e tale inoltre che, per ogni elemento j di $\{1, 2\}$, abbia misura positiva ogni elemento di $\mathcal{G}$ incluso in $J_{1,j}$ ed avente almeno un estremo in comune con $J_{1,j}$.

Per ogni elemento i di $\{1, 2\}$ sia $\{J_{2,2i-1}, I_{2,i}, J_{2,2i}\}$ la partizione di $J_{1,i}$ costituita da tre intervalli tali che: $I_{2,i}$ sia aperto, ogni elemento di $J_{2,2i-1}$ sia minore di ogni elemento di $J_{2,2i}$, $\mu(J_{2,2i})=\mu(J_{2,2i-1})=$ $=\frac{1}{2^2}\left(1-\frac{h^2-2^2}{h^2(h-2)}\right)\mu([a, b])$ e, conseguentemente: $\mu(I_{2,i})=\frac{1}{h^2}\mu([a,b])$, e tale inoltre che, per ogni elemento j di $\{2i-1, 2i\}$, abbia misura positiva ogni elemento di $\mathcal{G}$ incluso in $J_{2,j}$ ed avente almeno un estremo in comune con $J_{2,j}$.

Così continuando si costruisce una successione di famiglie finite di inervalli, $(\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}}\{J_{n,2i-1}, I_{n,i}, J_{n,2i}\})_{n\in N}$, tale che, per ogni numero positivo n e per ogni elemento i di $\{1, 2, \dots, 2^{n-1}\}$ $\{J_{n,2i-1}, I_{n,i}, J_{n,2i}\}$ sia la partizione di $J_{n-1,i}$ $(J_{0,0}=[a', b'])$ costituita da tre intervalli tali che: $I_{n,i}$ sia aperto, ogni elemento di $J_{n,2i-1}$ sia minore di ogni elemento di $J_{n,2i}$, $\mu(J_{n,2i})=\mu(J_{n,2i-1})=\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{h^n-2^n}{h^n(h-2)}\right)\mu([a, b])$ e, conseguentemente: $\mu(I_{n,i})=\frac{1}{h^n}\mu([a, b])$, e tale inoltre che, per ogni elemento j di $\{2i-1, 2i\}$, abbia misura positiva ogni elemento di $\mathcal{G}$ incluso in $J_{n,j}$ ed avente almeno un estremo in comune con $J_{n,j}$.

Posto quindi:

$$C=[a', b']-\bigcup_{n\in N}\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} I_{n,i}=\bigcap_{n\in N}\bigcup_{i=1}^{2^n} J_{n,i},$$

risulta:

$$\mu(C)=\left(1-\sum_{n\in N}\frac{2^{n-1}}{h^n}\right)\mu([a, b])=\frac{h-3}{h-2}\mu([a, b]).$$

Dimostriamo che C è perfetto. Per questo osserviamo che se x è un punto di C, esiste una successione di numeri interi positivi, $(i_n)_{n\in N}$, tale che $x\in \bigcap_{n\in N} J_{n,i_n}$. Se è $\{x\}=\bigcap_{n\in N} J_{n,i_n}$, allora x è un punto di frontiera di C di accumulazione per $C'=\bigcup_{n\in N}\bigcup_{i=1}^{2^n}\{\inf J_{n,i}, \sup J_{n,i}\}-\{a', b'\}=$ $=\bigcup_{n\in N}\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}}\{\inf I_{n,i}, \sup I_{n,i}\}$, se invece $\bigcap_{n\in N} J_{n,i_n}$ è un intervallo (chiuso) non degenere, esso è incluso in C ed i suoi estremi appartengono alla frontiera di C e sono di accumulazione per C', di qui, quando si osservi che C' è incluso in C, consegue che C è perfetto.

Si noti quindi che se $(i_n)_{n\in N}$ è una successione di numeri interi positivi, essendo: $\mu(\bigcap_{n\in N} J_{n,i_n})=0$, l'interno di C è di misura nulla.

Passiamo ora alla costruzione della funzione w. Per questo diciamo f_0 la funzione reale, definita in $[a', b']-C$, tale che, se x appartiene ad $I_{n,i}$, è: $f_0(x)=(2i-1)\,2^{-n}$.

La funzione f_0 è evidentemente continua in $[a', b']-C$.

Dimostriamo che f_0 è crescente. Per questo siano x' ed x'' due elementi di $[a', b']-C$ tali che: $x'<x''$, $x'\in I_{n',i'}$ ed $x''\in I_{n'',i''}$, allora:

se è $n'<n''$, deve essere: $i''>2^{n''-n'-1}(2i'-1)$, quindi è: $f_0(x'')>$ $>f_0(x')+2^{-n''}>f_0(x')$;

se è $n'=n''$, deve essere: $i'\leq i''$, quindi è: $f_0(x')\leq f_0(x'')$;

se è $n'>n''$, deve essere: $i'\leq 2^{n'-n''-1}(2i''-1)$, quindi è: $f_0(x')\leq$ $\leq f_0(x'')-2^{-n'}<f_0(x'')$;

il che dimostra, come volevasi, che f_0 è crescente.

Osservando che: $\limsup_n J_{n,1}=\liminf_n I_{n,1}=a'$ e $\liminf_n J_{n,2^n}=$ $=\limsup_n I_{n,2^n-1}=b'$, possiamo asserire che esistono due successioni di numeri reali, $(\bar{x}_n)_{n\in N}$ ed $(\bar{\bar{x}}_n)_{n\in N}$, tali che, per ogni numero intero positivo, n, si abbia: $\bar{x}_n\in I_{n,1}$, $\bar{\bar{x}}_n\in I_{n,2^{n-1}}$ e tali inoltre che: $a'=\lim_n \bar{x}_n$ e $b'=\lim_n \bar{\bar{x}}_n$, conseguentemente si ha:

$$\lim_{y\to a'} f_0(y)=\lim_n f_0(\bar{x}_n)=\lim_n 2^{-n}=0,$$

(*)

$$\lim_{y\to b'} f_0(y)=\lim_n f_0(\bar{\bar{x}}_n)=\lim_n (2^n-1)\,2^{-n}=1.$$

Sia ora $(i_n)_{n\in N}$ una successione di numeri interi positivi diversi sia dalla successione i cui elementi sono tutti uguali ad uno che dalla successione $(2^n)_{n\in N}$ e tale che risulti decrescente la successione $(J_{n,i_n})_{n\in N}$, e poniamo: $x' = \inf \bigcap_{n\in N} J_{n,i_n}$ ed $x'' = \sup \bigcap_{n\in N} J_{n,i_n}$. Diciamo quindi m un numero intero positivo tale che non siano vuoti gli insiemi: $\{i\in\{1,2,\dots,2^{m-1}\}, I_{m,i}\subseteq[a',x'[\}$ e $\{i\in\{1,2,\dots,2^{m-1}\}, I_{m,i}\subseteq]x'',b']\}$, se per ogni numero intero n, maggiore o uguale ad m, poniamo: $i_n' = \max\{i\in\{1,2,\dots,2^{n-1}\}, I_{n,i}\subseteq[a',x'[\}$ e diciamo $(x_n')_{n\in N}$ ed $(x_n'')_{n\in N}$ due successioni di elementi di $[a',b']-C$, la prima convergente ad x' e la seconda ad x'' e tali inoltre che, per ogni numero intero n, maggiore o uguale ad m, si abbia: $x'\in I_{n,i_n}$ ed $x_n''\in I_{n,i_n}$ (5), evidentemente risulta:

$$\lim_{y\to x'} f_0(y) = \lim_n f_0(x_n') = \lim_n (2i_n'-1)\,2^{-n}$$

$$\lim_{y\to x''} f_0(y) = \lim_n f_0(x_n'') = \lim_n (2i_n'+1)\,2^{-n},$$

ed essendo: $\lim_n f_0(x_n'') - \lim_n f_0(x_n') = \lim_n 2^{-n+1} = 0$, è:

$$(**) \qquad \lim_{y\to x'} f_0(y) = \lim_{y\to x''} f_0(y) \quad (6).$$

Sia quindi f il prolungamento di f_0 su $[a,b]$ tale che $f(x)=0$ per ogni punto x di $[a,a']$, $f(x)=1$ per ogni punto x di $[b',b]$ e $f(x) = \lim_{y\to x'} f_0(y) = \lim_{y\to x''} f_0(y)$ se x appartiene all'intervallo $[x',x'']$ incluso in C, x' ed x'' essendo due punti di frontiera per C.

Tenendo presenti le uguaglianze $(*)$ e $(**)$, è facile rendersi conto che la funzione f è crescente, continua e costante sia in ogni intervallo $I_{n,i}$ che in ogni intervallo non degenere e di misura nulla.

Se per ogni elemento J di $\mathcal{G}$ poniamo $w(J)=0$ se J è disgiunto da $[a,b]$ e $w(J) = (f(\sup J\cap[a,b]) - f(\inf J\cap[a,b]))\mu([a,b])$ se J è non disgiunto da $[a,b]$, la funzione w è, come volevasi, una misura

---

(5) Si osservi che è: $i_n' = \begin{cases} i_n/2 & \text{se } i_n \text{ è pari,} \\ (i_n+1)/2 & \text{se } i_n \text{ è dispari.} \end{cases}$

(6) Si noti che se è $x' = x'' = x$, allora risulta: $\lim_{y\to x'} f_0(y) = \lim_{x\to x^-} f_0(y)$ e $\lim_{y\to x''} f_0(y) = \lim_{y\to x^+} f_0(y)$.

finita su $\mathcal{G}$, nulla su ogni elemento di $\mathcal{G}$ disgiunto da C ed è tale che: $w([a, b[) = \mu([a, b])$, inoltre è facile convincersi che è $Dw(x) = 0$ per quasi ogni punto x di $[0, 1] - C$.

Dimostriamo infine che w è continua in $[0, 1]$, per questo siano x_0 un punto di $[0, 1]$ ed ε un numero reale positivo. Se è $w([0, x_0[) \geq \varepsilon/2$, sia $x_1 = \min\{x \in [a, x_0[, w([0, x[) = w([0, x_0[) - \varepsilon/4\}$, se invece è $w([0, x_0[) < \varepsilon/2$, poniamo $x_1 = 0$. Se è $w([x_0, 1]) \geq \varepsilon/2$, sia $x_2 = \max\{x \in]x_0, b], w([x_0, x[) = \varepsilon/4\}$, se invece è $w([x_0, 1]) < \varepsilon/2$, poniamo $x_2 = 1$. Essendo la funzione f non costante in $[x_1, x_2]$ è $\mu([x_1, x_2]) > 0$, se è: $\mu([x_1, x_0[) > 0$ e $\mu([x_0, x_2[) > 0$, poniamo $\eta_{x_0} = \min\{\mu([x_1, x_0[), \mu([x_0, x_2[)\}$, se invece uno dei due numeri, $\mu([x_1, x_0[)$ o $\mu([x_0, x_2[)$, è nullo, poniamo: $\eta_{x_0} = \mu([x_1, x_2])$, evidentemente ogni elemento J di $\mathcal{G}$ a cui x_0 appartiene ed avente misura minore di η_{x_0} è incluso in $[x_1, x_2[$ e, conseguentemente, è: $w(J) < \varepsilon$.

Osservazione. Si noti che se nell'enunciato del teorema 2 si fa l'ipotesi che μ sia positiva su ogni intervallo non degenere incluso in $[0, 1]$, allora la parte C di $[a, b]$ ha interno vuoto, conseguentemente, $[a, b] - C$ è *ovunque denso* in $[a, b]$.

Dal teorema 2 consegue il seguente altro:

3. *Siano: Z un elemento di $\mathcal{G}$ avente misura positiva e $\mathcal{D}$ una base di derivazione inclusa in $\mathcal{G}$.*

Esiste allora una misura finita su $\mathcal{G}$, w, continua in $[0, 1]$, nulla su ogni elemento di $\mathcal{G}$ disgiunto da Z e tale inoltre che: $w(Z) = \mu(Z)$ e $Dw(x) = 0$ per quasi ogni punto x di $[0, 1]$.

Dimostriamo ora la seguente proposizione:

4. *Siano: Z un elemento di $\mathcal{G}$, $\mathcal{D}$ una base di derivazione inclusa in $\mathcal{G}$ ed ε un numero reale positivo.*

Esistono allora una parte misurabile M_Z di $[0, 1] - Z$ di misura minore di ε, una partizione finita $\mathcal{P}$ di Z costituita da elementi di $\mathcal{G}$ di misura minore di ε, e, per ogni elemento T di $\mathcal{P}$ una misura finita su $\mathcal{G}$, φ_T, nulla su ogni elemento di $\mathcal{G}$ disgiunto da T e continua in $[0, 1]$, tali che siano verificate le seguenti tre condizioni:

a) per ogni elemento J di $\mathcal{G}$ sia minore di ε la somma delle misure degli elementi di $\mathcal{P}$ non inclusi in J e non disgiunti da J;

b) $\varphi_T(T) = \mu(T)$ e $D\varphi_T(x) = 0$ per quasi ogni punto x di $[0, 1]$;

c) per ogni elemento I di $\mathcal{D}$ che ha intersezione non vuota e con Z e con $[0,1]-(Z\cup M_Z)$, sia: $\sum_{T\in\mathcal{P}} |\mu(T\cap I)-\varphi_T(I)| < \varepsilon\mu(I)$.

DIM. Per comodità supponiamo ε minore di uno e sia $Z=[a,b[\cap[0,1]$. Essendo il teorema evidentemente vero se Z ha misura nulla, supponiamo Z di misura positiva, e diciamo d un numero reale positivo tale che, se x' ed x'' sono due punti di $[0,1]$, se è $|x'-x''|<d$, allora è pure $\mu([\inf\{x',x''\},\sup\{x',x''\}[)<\varepsilon^2/4$ e diciamo $\mathcal{P}$ una partizione finita di Z costituita da elementi di $\mathcal{G}$ di lunghezza minore di d, $\mathcal{P}$ soddisfa a quanto richiesto dalla condizione *a*).

Sia T un elemento di $\mathcal{P}$, se T ha misura nulla, diciamo φ_T la funzione identicamente nulla in $\mathcal{G}$, se T ha misura positiva, in virtù del teorema 3, esiste una misura finita su $\mathcal{G}$, φ_T, nulla su ogni elemento di $\mathcal{G}$ disgiunto da T, continua in $[0,1]$ e soddisfacente a quanto richiesto dalla condizione *b*).

Se è $\mu([0,1]-Z)<\varepsilon$, poniamo $M_Z=[0,1]-Z$, se è $\mu([0,1]-Z)\geq\varepsilon$, allora, se è $\mu([0,a])<\varepsilon/2$ sia b' un punto di $]b,1]$ tale che $\mu([b,b'[)=\varepsilon/2$ e poniamo $M_Z=[0,b'[-Z$, se è $\mu([b,1])<\varepsilon/2$ sia a' un punto di $[0,a[$ tale che $\mu([a',a[)=\varepsilon/2$ e poniamo $M_Z=[a',1]-Z$, se infine è $\mu([0,a])\geq\varepsilon/2$ e $\mu([b,1])\geq\varepsilon/2$, siano a' un elemento di $[0,a[$ e b' un elemento di $]b,1]$ tali che $\mu([a',a])=\mu([b,b'])=\varepsilon/4$ e poniamo $M_Z=[a',b'[-Z$, non è difficile dimostrare che M_Z, $\mathcal{P}$ e le funzioni φ_T soddisfano a quanto richiesto dalla condizione *c*).

Ricordiamo ora che sussiste la seguente proposizione (7):

5. *Ogni base di derivazione inclusa in $\mathcal{G}$ soddisfa alla proprietà forte di* VITALI (8).

---

(7) Cfr. M. DE GUZMAN, *A general form of the* VITALI *theorem*, Colloquium Mathematicum, XXXIV (1975) 69-72.

(8) Se S è un insieme non vuoto, $\mathcal{G}$ è una famiglia generatrice di parti di S, μ è una misura finita su G, $\mathcal{D}$ è una base di derivazione inclusa in $\mathcal{G}$ ed X è una parte di S, ogni parte $\mathcal{D}'$ di $\mathcal{D}$ tale che per quasi ogni punto x di X esistono successioni di elementi di $\mathcal{D}'$ convergenti ad x si chiama un *ricoprimento di* VITALI *di* X, si dice poi che $\mathcal{D}$ soddisfa alla proprietà forte di VITALI, se per ogni parte X di S avente *misura esterna* finita, per ogni ricoprimento di VITALI $\mathcal{D}'$ di X e per ogni numero reale positivo ε, esistono n elementi di $\mathcal{D}'$, $I_1, I_2, \dots, I_n$, a due a due disgiunti e tali che: $\mu((X^*-\bigcup_{i=1}^{n} I_i)\cup(\bigcup_{i=1}^{n} I_i-X^*))<\varepsilon$, X^* essendo una parte misurabile di S, includente X ed avente misura uguale alla misura esterna di X.

Dalle proposizioni 1,4 e 5 consegue la seguente altra [9]:

6. *Siano*: f *una funzione reale, misurabile in* $[0,1]$ *e* $\mathcal{D}$ *una base di derivazione inclusa in* $\mathcal{G}$.

Esiste allora una funzione reale, finitamente additiva e continua ψ, *definita in* $\mathcal{G}$, *derivabile in quasi ogni punto di* $[0,1]$ *e tale che*: $D\psi(x)=f(x)$ *per quasi ogni punto* x *di* $[0,1]$.

Siamo, infine, in grado di dimostrare la seguente proposizione:

7. *Sia* f *una funzione reale e misurabile, definita in* $[0,1]$.

Esiste allora una funzione reale e continua g, *definita in* $[0,1]$, *tale che si abbia*: $\lim\limits_{y\to x} \dfrac{g(x)-g(y)}{\mu([0,x[)-\mu([0,y[)} = f(x)$ *per quasi ogni punto* x *di* $[0,1]$.

Dim. Sia $\mathcal{D}$ la base di derivazione costituita dagli elementi di $\mathcal{G}$ aventi misura positiva. In virtù del teorema 6, esiste una funzione reale, finitamente additiva e continua ψ, definita in $\mathcal{G}$, derivabile in quasi ogni punto di $[0,1]$ e tale che $D\psi(x)=f(x)$ per quasi ogni punto x di $[0,1]$. Diciamo quindi g la funzione che ad ogni punto x di $[0,1]$ associa il numero reale $\psi([0,x[)$.

La funzione g è continua in $[0,1]$, infatti, per la continuità della funzione ψ è: $\lim\limits_{y\to 0}\psi([0,y[)=\lim\limits_{y\to 1}\psi([y,1])=0$, da cui, con semplici calcoli, consegue che: $\lim\limits_{y\to 0} g(y)=g(0)$ e $\lim\limits_{y\to 1} g(y)=g(1)$.

Sia ora x un puto di $]0,1[$ e diciamo $(y_n)_{n\in N}$ una successione di elementi di $[0,x[$ e $(z_n)_{n\in N}$ una successione di elementi di $]x,1]$, entrambe convergenti ad x, sempre in virtù della continuità della funzione ψ, è: $\lim\limits_n \psi([y_n,z_n[)=\lim\limits_n \psi([x,z_n[)=0$, e da ciò, con semplici calcoli, consegue, come volevasi, che: $\lim\limits_{y\to x} g(y)=g(x)$.

Sia ora x un punto di $]0,1[$ in cui è: $D\psi(x)=f(x)$, allora almeno una delle seguenti due proposizioni è vera:

p') per ogni elemento z di $]x,1]$ è: $\mu([x,z[)>0$;

p'') per ogni elemeno y di $[0,x[$ è: $\mu([y,x[)>0$.

---

[9] Cfr. L. Albano e N. Fedele, *Sull'esistenza di una primitiva di una funzione misurabile in ipotesi debole di* Vitali, in corso di stampa su « Le Matematiche » (Catania).

Se è vera la proposizione p'), essendo, per ogni elemento z di $]x, 1]$: $\dfrac{g(x)-g(z)}{\mu([0,x[)-\mu([0,z[)}=\dfrac{\psi([x,z[)}{\mu([x,z[)}$, è:

$$(*) \qquad \lim_{z\to x+}\frac{g(x)-g(z)}{\mu([0,x[)-\mu([0,z[)}=f(x).$$

Se è vera la proposizione p'') ed è falsa la proposizione p'), diciamo y' un elemento di $[0,x[$ tale che $\mu([x,x+(x-y)[)=0$, allora, per la continuità della funzione ψ, è pure: $\psi([x,x+(x-y')[)=0$, quindi, per ogni elemento y di $[y';x[$ è:

$$\frac{g(x)-g(y)}{\mu([0,x[)-\mu([0,y[)}=\frac{\psi([y,x+(x-y)[)}{\mu([y,x+(x-y)[)}$$

perciò risulta:

$$(**) \qquad \lim_{y\to x+}\frac{g(x)-g(y)}{\mu([0,x[)-\mu([0,y[)}=f(x).$$

Supponiamo infine che siano vere entrambe le proposizioni p') e p'') e sia y un punto di $[0,x[$ tale che $\mu([x,1])\geq\mu([y,x[)$. Diciamo quindi $(y_n)_{n\in N}$ una successione di elementi di $[y,x[$ convergente ad x, e, per ogni elemento n di N, sia z_n un elemento di $]x,1]$ tale che: $\mu([y_n,x[)=\mu([x,z_n[)$, ciò posto, notiamo che, per ogni elemento n di N, si ha: $\dfrac{g(x)-g(y_n)}{\mu([0,x[)-\mu([0,y_n[)}=2\dfrac{\psi([y_n,z_n[)}{\mu([y_n,z_n[)}-\dfrac{\psi([x,z_n[)}{\mu([x,z_n[)}$ e, quando si osservi che, in virtù della proposizione p'), è: $\lim\limits_n z_n=x$, possiamo asserire che anche in questa ipotesi è vera l'uguaglianza (**), dalle (*) e (**) consegue quanto volevasi.