GIOCHI A DUE PERSONE A SOMMA NULLA CON SPIONAGGIO ALEATORIO (*)

di FLAVIO PRESSACCO (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *È introdotto il concetto di spionaggio aleatorio in giochi a due persone con minimax nell'ambito delle strategie miste. Si ricavano e studiano conseguentemente le strategie minimax dei giochi in tal modo ottenuti.*

SUMMARY. - *In a two person zero sum game with mixed minimax strategies the concept of random spying is introduced. Optimal minimax strategies for the modified game thus obtained are derived and analyzed.*

1. Introduzione.

Solitamente il problema dell'informazione nei giochi a due persone concerne l'acquisizione di notizie circa la matrice dei pagamenti nei casi in cui essa non sia certa per ambedue i giocatori (1).

Con riferimento ad un gioco a due persone a somma nulla con minimax nell'ambito delle strategie miste ci porremo qui in una ottica piuttosto diversa.

Precisamente supposta perfettamente nota la matrice dei pagamenti, abbiamo introdotto la seguente ipotesi: uno dei giocatori ha attivato un meccanismo di spionaggio che con una fissata probabilità, gli consente di essere informato sulla effettiva mossa dell'avversario (cioè sull'esito

(*) Pervenuto in Redazione il 20 gennaio 1979.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività di ricerca matematica del C. N. R. Gruppo G. N. A. F. A..

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica Finanziaria dell'Università. Piazzale Europa 1 - 34127 Trieste.

(1) Si vedano in proposito [1], [2] e [4].

del sorteggio con il quale questi determina in concreto la propria decisione).

L'esistenza di un tale meccanismo è nota anche all'altro giocatore, che peraltro non dispone di un meccanismo di controspionaggio, ovvero ignora se la sua mossa sia stata scoperta.

Definiamo questo modello come un gioco a due persone a somma nulla con spionaggio aleatorio.

Per giochi così definiti e con riferimento dapprima al semplice caso 2×2 (due sole strategie pure per ogni giocatore) abbiamo determinato le strategie minimax in funzione della probabilità, che caratterizza il meccanismo di spionaggio. I risultati così ottenuti sono piuttosto sorprendenti e contrari all'intuizione. A tale proposito presentiamo un'analisi interpretativa che ci sembra opportunamente chiarire le ragioni ultime di tale situazione. L'ultima parte del lavoro è infine dedicata alla presentazione di risultati e congetture per il più generale caso di un gioco $n\times n$.

2.

Converrà ricordare alcuni fondamentali risultati concernenti un generico gioco a due persone a somma nulla di tipo 2×2.

La matrice dei pagamenti, M, del gioco sia la seguente:

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} a_{11}\leq 0;\ a_{22}=0;\ a_{12}, a_{21}>0. \tag{2.1}$$

Detto $D_0=-a_{12}\,a_{21}<0$, il determinante della matrice M, e D_{1y}, D_{2y}, D_{1x}, D_{2x} rispettivamente i determinanti delle seguenti matrici:

$$D_{1y}=\det\begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=-a_{12} \tag{2.2}$$

$$D_{2y}=\det\begin{pmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & 1 \end{pmatrix}=a_{11}-a_{21} \tag{2.3}$$

$$D_{1x}=\det\begin{pmatrix} 1 & a_{21} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=-a_{21} \tag{2.4}$$

$$D_{2x}=\det\begin{pmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{12} & 1 \end{pmatrix}=a_{11}-a_{12} \tag{2.5}$$

ovvero i determinanti (tutti negativi) delle matrici ottenute per sostituzione di un vettore colonna unitario rispettivamente nella M e nella M^T; vale il seguente noto risultato [2]:
esiste un punto di minimax nell'ambito delle strategie miste, con strategie $(x_1, x_2=1-x_1)$ per il giocatore A (riga) e $(y_1, y_2=1-y_1)$ per il giocatore B (colonna), e valore v del gioco forniti rispettivamente dalle:

$$x_1=\frac{D_{1x}}{D_{1x}+D_{2x}},\quad x_2=\frac{D_{2x}}{D_{1x}+D_{2x}},\quad y_1=\frac{D_{1y}}{D_{1y}+D_{2y}},\quad y_2=\frac{D_{2y}}{D_{1y}+D_{2y}},$$

(2.6)

$$v=\frac{D_0}{D_{1x}+D_{2x}}=\frac{D_0}{D_{1y}+D_{2y}}.$$

Viceversa se un gioco 2×2 ha soluzione nell'ambito delle strategie miste è sempre possibile ricondursi mediante cambiamento di righe o colonne e una strategicamente inessenziale variazione nell'origine a una matrice dei pagamenti del tipo M di cui alla 2.1.

Con ciò i determinanti delle matrici (2.1), ... , (2.5) risultano, come si constata immediatamente, del medesimo segno negativo.

3.

Tornando al nostro gioco con matrice dei pagamenti del tipo (2.1), supporremo qui che il giocatore B (colonna) abbia approntato un meccanismo di spionaggio che gli consente con probabilità π, di conoscere la decisione presa da A, nel senso che con tale probabilità è informato dell'esito del sorteggio in base al quale A determina concretamente la propria scelta (quando la strategia minimax di A sia mista chè altrimenti non vi ha dubbio alcuno).

Supponiamo ancora che B possa adeguatamente sfruttare tale informazione, adeguandovi ove la riceva, la propria decisione.

Il giocatore A dal canto suo è al corrente di tale rischio, e anzi supporremo qui che anch'egli gli attribuisca la medesima probabilità π, pur non potendo effettivamente accertare quando esso si verifichi (oppu-

[2] Si veda in proposito [3] per una dimostrazione valida nel più generale caso $n\times n$. Cfr. anche pag. 13.

re apprendendolo solo quando non può più modificare il proprio comportamento, il che è lo stesso).

Il modello di svolgimento del gioco è dunque il seguente.

Ambedue i giocatori definiscono segretamente (e vedremo poi come) una strategia pura o mista cui attenersi; A in base ad essa effettuata senz'altro la propria scelta (con sorteggio se la strategia in questione è mista); mentre B vi si attiene solo se non abbia ottenuto l'informazione circa la decisione scelta da A (circa l'esito del sorteggio di A). Quando la ottenga invece, vi opporrà ovviamente la risposta ottima contro quella scelta, indipendentemente dalla strategia elaborata per l'incertezza.

Converrà anzi formalmente pensare ad un gioco $G(\pi)$, derivato dal precedente, in cui ambedue i giocatori hanno ancora due strategie. Per il giocatore A, esse sono proprio le stesse $A_1(\pi)=A_1$, ed $A_2(\pi)=A_2$ del gioco originario, mentre quelle di B rimangono definite, detto E l'evento: B è informato della scelta A_i di A, al modo seguente:

$$B_1(\pi)=\begin{cases} B_h\colon\ a_{ih}=\min\limits_j a_{ij} \text{ se } E \\ B_1 \text{ se } \overline{E} \end{cases}$$

$$B_2(\pi)=\begin{cases} B_h\colon\ a_{ih}=\min\limits_j a_{ij} \text{ se } E \\ B_2 \text{ se } \overline{E}. \end{cases}$$

Ne segue che la matrice dei pagamenti del gioco $G(\pi)$, ha elemento generico (che rappresenta la speranza matematica del guadagno di A nell'ipotesi della scelta di strategie $A_i(\pi), B_j(\pi)$) pari $a_{ij}(\pi)=(1-\pi)\,a_{ij}+$ $+\pi\,(\min\limits_j a_{ij})$.

E infatti subordinatamente a quelle scelte, il guadagno di A può assumere determinazione a_{ij} (con probabilità $1-\pi$), oppure $\min\limits_j a_{ij}$ con probabilità π.

Interessa ora analizzare se e come variino le strategie minimax $\underline{x}(\pi)$ e $\underline{y}(\pi)$ e il valore del gioco derivato $G(\pi)$, al variare di π fra 0 ed 1 (3).

Nel caso particolare di un gioco descritto da una matrice del tipo (2.1) otteniamo la seguente matrice del gioco derivato:

(3) Si tenga presente che in genere A e B possono anche influire sul valore di π scegliendo metodi di segretezza, rispettivamente di spionaggio più efficaci.

$$M(\pi)=\begin{pmatrix} a_{11} & \pi a_{11}+(1-\pi)a_{12} \\ (1-\pi)a_{21} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

e la sua trasposta:

$$M^T(\pi)=\begin{pmatrix} a_{11} & (1-\pi)a_{21} \\ \pi a_{11}+(1-\pi)a_{12} & 0 \end{pmatrix}; \tag{3.2}$$

sicché risulta:

$$D_0(\pi)=-a_{21}(1-\pi)[\pi a_{11}+(1-\pi)a_{12}], \tag{3.3}$$

$$D_{1y}(\pi)=\det\begin{pmatrix} 1 & \pi a_{11}+(1-\pi)a_{12} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=-\pi a_{11}-(1-\pi)a_{12}, \tag{3.4}$$

$$D_{2y}(\pi)=\det\begin{pmatrix} a_{11} & 1 \\ (1-\pi)a_{21} & 1 \end{pmatrix}=a_{11}-(1-\pi)a_{21}<0, \tag{3.5}$$

$$D_{1x}(\pi)=\det\begin{pmatrix} 1 & (1-\pi)a_{21} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=-a_{21}(1-\pi)=(1-\pi)D_{1x}(0)<0, \tag{3.6}$$

$$D_{2x}(\pi)=\det\begin{pmatrix} a_{11} & 1 \\ \pi a_{11}+(1-\pi)a_{12} & 1 \end{pmatrix}= \tag{3.7}$$
$$=(1-\pi)(a_{11}-a_{12})=(1-\pi)D_{2x}(0)<0.$$

Dunque, ricordando i risultati presentati al § 2, si avrà una soluzione nell'ambito delle strategie miste quando $D_0(\pi)$ e $D_{1y}(\pi)<0$, ovvero quando:

$$\pi(a_{11}-a_{12})+a_{12}>0 \quad \text{cioè} \quad 0\leq\pi<\pi^*=\frac{a_{12}}{a_{12}-a_{11}} \tag{3.8}$$

è questa del resto la condizione che deve essere soddisfatta perché la matrice del gioco derivato risulti del tipo (2.1) (ovvero sia $a_{12}(\pi)>0$).

Per valori di π nell'intervallo descritto dalla (3.8) risulta, ricordando le (2.2) e segg.:

$$x_1(\pi)=\frac{a_{21}}{a_{21}+a_{12}-a_{11}}, \tag{3.9}$$

$$x_2(\pi)=\frac{a_{12}-a_{11}}{a_{21}+a_{12}-a_{11}}. \tag{3.10}$$

Dunque, in tale intervallo, la strategia mista minimax per A non dipende da π ed è proprio la stessa ottima per il gioco originario (cfr. (2.4) (2.5)).

Quando poi π raggiunga o superi il valore critico $\pi^* = \frac{a_{12}}{a_{12} - a_{11}}$ la matrice del gioco derivato ammette, come si può constatare immediatamente, l'elemento $a_{22}(\pi) = 0$ come minimo della seconda riga, ma anche massimo della seconda colonna. Il minimax è in tal caso raggiunto nell'ambito delle strategie pure.

D'altronde è abbastanza intuitivo che se la probabilità π di essere scoperto è sufficientemente alta, ad A conviene ripiegare sulla strategia pura di sicurezza (cioè comportarsi da giocatore assolutamente pessimista!).

Peraltro sembrerebbe logico attendersi che la transizione dalla strategia mista ottima per il gioco originario a quella pura seguisse con continuità all'aumentare di π. Tale previsione è del tutto errata come chiarito dalle (3.9), (3.10).

Per quel che concerne il giocatore B è, sempre nell'intervallo descritto dalla 3.8:

$$y_1(\pi) = y_1(0) - \frac{\pi}{(1-\pi)} \cdot \frac{a_{11}}{a_{11} - a_{12} - a_{21}} \tag{3.11}$$

$$y_2(\pi) = y_2(0) + \frac{\pi}{(1-\pi)} \cdot \frac{a_{11}}{a_{11} - a_{12} - a_{21}} \tag{3.12}$$

mentre ovviamente per valori di π superiori al valore critico la seconda strategia è strategia (pura) di minimax.

Analizzeremo in seguito più da vicino il significato delle (3.11) e (3.12).

Per il valore del gioco risulta:

$$v(\pi) = \begin{cases} v(0) - \pi \dfrac{(a_{12}\, a_{21} - a_{11}\, a_{21})}{a_{12} + a_{21} - a_{11}}, & 0 \leq \pi < \pi^* \\ 0 & \pi^* \leq \pi \leq 1 \end{cases} \tag{3.13}$$

sicché $v(\pi)$ risulta essere una funzione lineare ovviamente decrescente dell'argomento, fino al punto in cui l'argomento stesso assume il valore critico; da tale punto in poi essa è identicamente nulla.

Consideriamo poi la differenza fra il valore del gioco originario e quello del gioco derivato:

$$(3.14) \qquad v(0)-v(\pi)=\begin{cases} \pi \dfrac{[a_{21}(a_{12}-a_{11})]}{a_{21}+a_{12}-a_{11}} & 0\leq\pi<\pi^* \\ \\ \dfrac{a_{21}\,a_{12}}{a_{21}+a_{12}-a_{11}} & \pi\leq\pi^*\leq 1\,. \end{cases}$$

Tale differenza può essere considerata come la speranza matematica del vantaggio derivante a B dal predisporre un meccanismo di spionaggio di « efficacia » π. Lo chiameremo perciò valore dello spionaggio (esso è un particolare valore dell'informazione!).

Si noti che esso non aumenta quando π supera il valore critico, sicché è inutile predisporre meccanismi di spionaggio troppo sofisticati (poiché l'avversario è supposto razionale!).

4.

Presentiamo qui un'analisi interpretativa dei risultati esposti al precedente § 3.

Già abbiamo visto come perlomeno per valori di π al disotto di quello critico non varii il comportamento strategico di A (rispetto a quello ottimo per il gioco originario). Tale risultato non intuitivo può essere meglio spiegato analizzando la $f(p, q, \pi)$, ossia la funzione che descrive la speranza matematica del guadagno di A, nell'ipotesi dell'adozione di una strategia $(p, 1-p)$ da parte di A, di una $(q, 1-q)$ da parte di B e di un meccanismo di spionaggio π.

È:

$$(4.1) \qquad f(p, q, \pi)=p\,q\,a_{11}+p\,(1-q)\,[\pi\,a_{11}+(1-\pi)\,a_{12}]+ \\ +(1-p)\,q\,(1-\pi)\,a_{21},$$

ovvero:

$$(4.2) \qquad f(p, q, \pi)=q\,(1-\pi)\,[p\,(a_{11}-a_{12}-a_{21})+a_{21}]+ \\ +p\,[a_{12}+\pi\,(a_{11}-a_{12})].$$

Converrà anzi confrontare la (4.2) con la $f(p, q, 0)$ del gioco originario, ovvero con la:

$$f(p, q, 0) = q\,[p\,(a_{11} - a_{12} - a_{21}) + a_{21}] + p\,a_{12}. \tag{4.3}$$

Un minimo di riflessione sulle (4.2), (4.3) chiarisce come finché $a_{12} + \pi\,(a_{11} - a_{12}) > 0$, ovvero $\pi < \pi^*$, la strategia ottima per A rimane quella $p^* = \dfrac{a_{21}}{a_{21} + a_{12} - a_{11}}$ che annulla l'espressione $p\,(a_{11} - a_{12} + a_{21}) + a_{21}$ esattamente come nel gioco originario.

Esaminiamo infatti la (4.2) tenendo presente che il comportamento ottimo nel senso del minimax per A, si trova scegliendo il valore p che realizza $\max\limits_{0 \le p \le 1} \left[\min\limits_{0 \le q \le 1} f(p, q, \pi) \right]$.

Ora la quantità entro parentesi quadra del primo addendo della (4.2) è negativa per $p > p^*$, nulla se $p = p^*$, positiva per $p < p^*$, mentre il secondo addendo non dipende da q.

Ne deriva che i minimi al variare di q della $f(p, q, \pi)$ si raggiungono per $q = 1$ se $p > p^*$, e viceversa in $q = 0$ se $p < p^*$, mentre in $p = p^*$ è identicamente (qualunque sia q) $f(p, q, \pi) = f(p^*) = p^*\,[a_{12} + \pi\,(a_{11} - a_{12})]$.

I valori di tali minimi sono poi descritti dalle:

$$f(p, 0, \pi) = p\,[a_{12} + \pi\,(a_{11} - a_{12})]; \text{ ed } f(p, 1, \pi) = p\,(a_{11} - a_{21}) + a_{21};$$

definite per valori di p minori, rispettivamente maggiori, di quello p^* critico.

Dunque $f(p, 1, \pi)$ è una funzione decrescente di p, mentre la $f(p, 0, \pi)$ risulta essere una funzione crescente o decrescente di p a seconda che π minore o maggiore di π^*. Immediate le conclusioni ricordando gli scopi di massimizzazione di A.

Tornando al comportamento del giocatore B, l'esame delle (3.11), (3.12) chiarisce come le sue scelte strategiche variino con continuità nell'intervallo $0 \le \pi \le \pi^*$.

Nemmeno questo comportamento è intuitivo. Potrebbe sembrare infatti che, ove non riceva alcuna informazione sull'esito del sorteggio di A, il cui comportamento strategico è peraltro (finché $\pi < \pi^*$) invariato rispetto al gioco originario, B non abbia alcun motivo per modificare a sua volta la propria strategia. Tale ragionamento è per altro fallace.

In effetti è proprio modificando convenientemente (al variare di π) la propria strategia, ovvero diminuendo opportunamente q al crescere di π (e dunque aumentando la probabilità di scegliere B_2) che B dissuade A dallo spostarsi verso la strategia pura di sicurezza A_2, costringendolo così a mantenere immutata la propria strategia mista!

Per convincersi di ciò basterà ancora analizzare la $f(p, q, \pi)$ stavolta scritta nella forma:

$$f(p, q, \pi) = \pi\, p\, a_{11} + (1-\pi)\, f(p, q, 0), \tag{4.4}$$

ricordando inoltre che la q^* di minimax per il caso $\pi = 0$ rende costante rispetto p la $f(p, q^*, 0)$.

Risulta chiaro allora come la scelta di mantenere tale strategia q^* consentirebbe ad A di spostarsi vantaggiosamente in $p = 0$, neutralizzando così l'effetto per lui negativo della componente $\pi\, p\, a_{11}$.

5.

Prima di passare all'esame del caso generale presentiamo un semplice esempio riguardante un gioco 2×2.

Sia:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice dei pagamenti di un gioco con strategie miste di minimax rispettivamente pari a $(1/2, 1/2)$ per A, e $(1/4, 3/4)$ per B; sicché risulta pari a $v = 1/2$ il valore del gioco originario.

Il valore critico di π è $\pi^* = 1/2$. Al di sotto di tale valore le strategie ottime del gioco derivato $G(\pi)$ sono descritte dalla $q(\pi) = \dfrac{1-2\pi}{4(1-\pi)}$, mentre rimane $p(\pi) = 1/2$; e il valore del gioco derivato diviene $v(\pi) = 1/2 - \pi$, sicché è proprio pari a π il valore dello spionaggio. Ovviamente quando $\pi \geq 1/2$ si passa alle strategie pure A_2, B_2.

6.

Passando ora al caso generale, appare naturale chiedersi se e come si estendano i risultati finora enunciati. A tale riguardo presenteremo alcune considerazioni concernenti il caso in cui il gioco originario sia descritto da una matrice quadrata dei pagamenti $n \times n$ tale che: il gioco ammette minimax nell'ambito delle strategie miste con positive probabilità di sorteggio per ognuna delle n strategie pure a disposizione di ambedue i giocatori, e inoltre sia $a_{nn} = 0$, unico elemento nullo della matrice e massimo dei minimi di riga.

Proveremo che in tale ipotesi esistono due valori critici $\underline{\pi}$ e $\bar{\pi}$, di π, $0<\underline{\pi}\leq\bar{\pi}<1$, tali che valgono per il gioco derivato le seguenti conclusioni: nell'intervallo $0<\pi<\underline{\pi}$ la strategia minimax di A rimane quella del gioco originario, mentre quella di B è una mista che utilizza tutte le strategie pure disponibili, ed inoltre $y_j(\pi)$, probabilità attribuita alla scelta della j-esima strategia pura è una funzione continua di π.

Il valore del gioco è su tale intervallo una funzione lineare decrescente di π. Nell'intervallo $\bar{\pi}\leq\pi\leq 1$, il gioco modificato ha invece minimax nell'ambito delle strategie pure $A_n, B_n(\pi)$. Per quel che riguarda la situazione nell'intervallo fra i due suddetti valori critici proporremo più tardi alcune congetture.

Converrà intanto ricordare che la caratterizzazione presentata a pag. 3 si estende al caso di un gioco $n\times n$ al modo seguente: un gioco a due persone a somma nulla con matrice quadrata dei pagamenti M di ordine n, tale che il massimo dei minimi di riga sia 0, ha soluzione nell'ambito delle strategie miste con vettori di probabilità $\underline{x}, \underline{y}$ strettamente positivi (ovvero positive probabilità di sorteggio per ogni strategia pura) se e solo se tutti i determinanti D_{ix}, D_{jy}, D_0, $i,j=1,\dots,n$ hanno il medesimo segno.

Introduciamo alcune notazioni: indicheremo con notazione vettoriale con $M=(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$ la matrice del gioco originario, e con $M^T=(\underline{a}_1', \underline{a}_2', \dots, \underline{a}_n')$ la sua trasposta, con b il vettore colonna dei minimi di riga della M ($b_i=\min_j a_{ij}$).

È dopodiciò:

$$M(\pi)=(\pi\,\underline{b}+(1-\pi)\,\underline{a}_1, \dots, \pi\,\underline{b}+(1-\pi)\,\underline{a}_n) \tag{6.1}$$

la matrice dei pagamenti del gioco derivato, ed

$$M^T(\pi)=(\pi\,\underline{b}_1+(1-\pi)\,\underline{a}_1', \dots, \pi\,\underline{b}_n+(1-\pi)\,\underline{a}_n') \tag{6.2}$$

la sua trasposta ($\underline{b}_h$ essendo ovviamente il vettore colonna i cui elementi sono tutti pari al minimo della riga h-esima della M).

Indicata poi con:

$$U_j=(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{j-1}, \underline{b}, \underline{a}_{j+1}, \dots, \underline{a}_n) \tag{6.3}$$

la matrice ottenuta sostituendo nella M il vettore $\underline{a}_j$ con $\underline{b}$, risulta

immediatamente in forza di elementari proprietà dei determinanti:

$$(6.4) \qquad D_0(\pi) = \det M(\pi) = \sum_{j=1}^{n} \pi (1-\pi)^{n-1} \det U_j + (1-\pi)^n \det M(0)$$

ovvero:

$$(6.5) \qquad D_0(\pi) = (1-\pi)^{n-1} [\pi \sum_{j=1}^{n} \det U_j + (1-\pi) D_0].$$

Questo determinante è una funzione continua di π; assume in $\pi=0$ il valore D_0 e dunque indicando con π_0 la più piccola delle eventuali radici nell'intervallo $(0, 1)$ dell'equazione:

$$(6.6) \qquad \pi \sum_{j=1}^{n} \det U_j + (1-\pi) D_0 = 0$$

$D_0(\pi)$ mantiene nell'intervallo $0 < \pi < \min(\pi_0, 1)$ lo stesso segno di D_0.

Indicata poi con

$$(6.7) \qquad S_{js} = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{s-1}, \underline{b}, \underline{a}_{s+1}, \dots, \underline{a}_{j-1}, \underline{1}, \underline{a}_{j+1}, \dots, \underline{a}_n)$$

la matrice ottenuta inserendo al posto della j-esima colonna di M il vettore unitario e al posto della s-esima il vettore b, risulta ancora:

$$(6.8) \qquad \det M_j(\pi) = D_{jy}(\pi) = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{n} \pi (1-\pi)^{n-2} \det S_{js} + (1-\pi)^{n-1} D_{jy}(0) =$$

$$= (1-\pi)^{n-2} [\sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{n} \pi \det S_{js} + (1-\pi) D_{jy}].$$

Questo determinante ha le medesime caratteristiche del precedente (6.5), ovvero è una funzione continua di π, assume in $\pi=0$ il valore D_{jy} e, detta π_j la più piccola delle eventuali radici nell'intervallo $(0, 1)$ dell'equazione:

$$(6.9) \qquad \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{n} \pi \det S_{js} + (1-\pi) D_{jy} = 0$$

mantiene il segno di D_{jy} nell'intervallo $0 < \pi < \min(\pi_j, 1)$.

Indicando infine con T_{js} la matrice:

$$T_{js}=(\underline{a}'_1, \dots, \underline{a}'_{s-1}, \underline{b}_s, \underline{a}'_{s+1}, \dots, \underline{a}'_{j-1}, 1, \underline{a}'_{j+1}, \dots, \underline{a}'_n) \tag{6.10}$$

ottenuta sostituendo in M^T il vettore $\underline{b}_s$ ad a_s' e il vettore unitario ad a_j', risulta det $T_{js}=0$ sicché:

$$\det M_i(\pi)=D_{ix}(\pi)=(1-\pi)^{n-1} D_{ix}(0). \tag{6.11}$$

Segue dalla (6.11) che $D_{ix}(\pi)$ mantiene per ogni valore di π il segno di D_{ix}.

Dunque posto $\underline{\pi}=\min\{\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n\}$, le (6.6), (6.8), (6.11) ci permettono di affermare che nell'intervallo $0<\pi<\underline{\pi}$ tutti i determinanti $D_0(\pi)$, $D_{ix}(\pi)$, $D_{jy}(\pi)$, hanno lo stesso segno (quello comune a D_0, D_{ix}, D_{jy}) sicché il gioco derivato avrà in quell'intervallo minimax nello ambito delle strategie miste con utilizzo di tutte le strategie pure a disposizione dei giocatori, con strategie minimax e valore del gioco forniti ancora dalla versione generalizzata della (2.6).

Risulta dunque in tale intervallo:

$$x_i(\pi)=\frac{D_{ix}(\pi)}{\sum_{h=1}^{n} D_{ix}(\pi)}=\frac{(1-\pi)^{n-1} D_{ix}(0)}{\sum_{h=1}^{n} (1-\pi)^{n-1} D_{hx}(0)}=\frac{D_{ix}(0)}{\sum_{h=1}^{n} D_{hx}(0)}=x_i(0) \tag{6.12}$$

è con ciò provato che ivi è invariata la strategia minimax di A.

È poi sempre su tale intervallo:

$$y_j(\pi)=\frac{D_{jy}(\pi)}{\sum_{h=1}^{n} D_{hy}(\pi)}=\frac{(1-\pi)^{n-2}\left[\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{n} \pi \det S_{js}+(1-\pi) D_{jy}\right]}{(1-\pi)^{n-2}\sum_{h=1}^{n}\left[\sum_{\substack{s=1\\ s\neq h}}^{n} \pi \det S_{hs}+(1-\pi) D_{hy}\right]}= \tag{6.13}$$

$$=\frac{\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{n} \pi \det S_{js}+(1-\pi) D_{jy}}{\sum_{h=1}^{n}\left[\sum_{\substack{s=1\\ s\neq h}}^{n} \pi \det S_{hs}+(1-\pi) D_{hy}\right]}.$$

È ora immediato intendere che risulta:

$$\sum_{h=1}^{n} \sum_{\substack{s=1\\ s\neq h}}^{n} \pi \det S_{hs}=\pi \sum_{h=1}^{n} \sum_{\substack{s=1\\ s\neq h}} \det S_{hs}=0. \tag{6.14}$$

È infatti $\det S_{uv} = -\det S_{vu}$, e dunque i $\det S_{hs}$ sono a due a due a somma nulla, sicché in conclusione:

$$(6.15) \qquad y_j(\pi) = \frac{\pi \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq j}}^{n} \det S_{js} + (1-\pi) D_{jy}}{(1-\pi) \sum_{h=1}^{n} D_{hy}} = \frac{\pi \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq j}}^{n} \det S_{js}}{(1-\pi) \sum_{h=1}^{n} D_{hy}} + \frac{D_{jy}}{\sum_{h=1}^{n} D_{hy}} =$$

$$= y_j(0) + \frac{\pi \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq j}}^{n} \det S_{js}}{(1-\pi) \sum_{h=1}^{n} D_{hy}}.$$

È con ciò provato che $y_j(\pi)$ varia con continuità al variare di π. Per quel che riguarda il valore del gioco è:

$$(6.16) \qquad v(\pi) = \frac{D_0(\pi)}{\sum_{h=1}^{n} D_{hx}(\pi)} = \frac{(1-\pi)^{n-1} [\pi \sum_{j=1}^{n} \det U_j + (1-\pi) D_0]}{(1-\pi)^{n-1} \sum_{h=1}^{n} D_{hx}(0)} =$$

$$= \frac{\pi \sum_{j=1}^{n} \det U}{\sum_{h=1}^{n} D_{hx}(0)} + (1-\pi) v(0) = v(0) - \pi \frac{[D_0 - \sum_{j=1}^{n} \det U_j]}{\sum_{h=1}^{n} D_{hx}(0)}$$

sicché $v(\pi)$ risulta essere come asserito, una funzione lineare dell'argomento.

Tornando ora alla matrice $M(\pi)$, si può notare che ovviamente i minimi di riga si mantengono in corrispondenza dell'elemento che realizza il minimo della riga nella matrice originaria.

Possono tali minimi diventare anche massimo della propria colonna (realizzando dunque un minimax nell'ambito delle strategie pure)? In forza delle ipotesi sulla M ciò può verificarsi solo in corrispondenza dell'elemento nullo a_{nn}.

In tali condizioni infatti ogni minimo di riga della M è per ipotesi negativo, ciò vale anche per $M(\pi)$ (si noti che il valore del minimo di riga è costante indipendente da π). L'ultima riga della M del gioco

derivato d'altronde ha valori $(1-\pi)\, a_{nj}$ tutti non negativi, sicché i massimi di colonna di tale matrice sono sicuramente non negativi al contrario dei minimi di ogni riga (esclusa l'ultima).

Ora l'elemento nullo $a_{nn}(\pi)$ risulta massimo della propria colonna per valori di π tali che siano tutti nulli o negativi gli elementi:

$$\pi\, b_i + (1-\pi)\, a_{in}, \qquad i=1, \dots, n-1, \tag{6.17}$$

(cfr. la definizione di b_i).

Se $a_{in}<0$, il corrispondente elemento della (6.17) è sicuramente negativo per ogni valore (con significato probabilistico) di π; qualora invece sia $a_{in}>0$, esiste un valore $\pi_i = \dfrac{a_{in}}{a_{in}-b_i}$ interno all'intervallo (0, 1) che lo rende nullo.

Sia $\bar{\pi} = \max\limits_{i\,:\,a_{in}>0} \pi_i$. Nell'intervallo $\bar{\pi} \leq \pi \leq 1$, l'elemento $a_{nn}(\pi)=0$ è contemporaneamente minimo della propria riga e massimo della propria colonna; le strategie $A_n, B_n(\pi)$ sono allora una coppia di strategie pure di minimax del gioco derivato $G(\pi)$.

Ora, a meno di particolari coincidenze, risulterà $\underline{\pi} < \bar{\pi}$; cosa accade nell'intervallo $(\underline{\pi}, \bar{\pi})$?

Sembra verosimile la congettura che esistano $n-1$ valori critici $0=\pi_0^* < \pi_1^* = \underline{\pi} \leq \pi_2^* \leq \dots \leq \pi^*_{n-1} = \bar{\pi} < \pi_n^* = 1$, tali che la strategia minimax $\underline{x}(\pi)$ del giocatore riga rimane invariata su ogni intervallo $\pi_h^* \leq \pi < \pi^*_{h+1}$ $(h=0, \dots, n-1)$, con l'utilizzo ivi di una strategia mista che fa intervenire esattamente $n-h$ strategie pure; anche il giocatore colonna utilizza in corrispondenza di tali intervalli esattamente $n-h$ strategie pure per la propria strategia minimax, (e su un fissato intervallo sempre le stesse), peraltro la $y_j(\pi)$ risulta una funzione continua di π, ma in generale non costante all'interno di tali intervalli.

Non è però chiaro sotto quali condizioni la riduzione del numero delle strategie pure impiegate per la strategia mista minimax abbia carattere di regolarità, ovvero si ottenga tramite semplice progressiva espulsione in corrispondenza ai valori critici di strategie pure precedentemente utilizzate per la combinazione ottimale.

Per il valore del gioco si può congetturare che esso risulti una funzione continua di π e lineare a tratti, geometricamente rappresentabile come una spezzata di segmenti che si congiungono in corrispondenza ai punti critici.

7.

Per un esempio concernente queste generalizzazioni si consideri il gioco descritto dalla seguente matrice 3×3;

$$M=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

con strategie miste minimax rispettivamente: $(30/51, 8/51, 13/51)$ per A, e $(4/51, 27/51, 20/51)$ per B, e valore $v=70/51$.

Si trovano con facili calcoli valori critici $\underline{\pi}=4/11, \bar{\pi}=5/7$.

Sull'intervallo $0<\pi<4/11$ è poi invariata rispetto al gioco originario (7.1) la strategia minimax di A, mentre quella di B è descritta dal vettore $\underline{y}(\pi)=\left(\frac{4-11\pi}{51(1-\pi)}, \frac{27-36\pi}{51(1-\pi)}, \frac{20-4\pi}{51(1-\pi)}\right)$ e il valore del gioco derivato risulta pari a $v(\pi)=\frac{210}{153}-\frac{348\pi}{153}$.

Per $\pi\geq 5/7$ si passa alle strategie pure $A_3, B_3(\pi)$ con valore $v(\pi)=0$. Nell'intervallo $4/11\leq\pi<5/7$ infine, si trova con una indagine diretta sulla quale non ci dilunghiamo, che le strategie miste minimax prevedono l'utilizzo di due sole strategie pure per ogni giocatore, e sono rispettivamente per A: $(0,2/9,7/9)$ e per B: $\left(0, \frac{5-7\pi}{9(1-\pi)}, \frac{4-2\pi}{9(1-\pi)}\right)$ con valore del gioco $v(\pi)=\frac{170}{153}-\frac{238\pi}{153}$.

Riportiamo infine per comodità del lettore i grafici di $y_j(\pi), j=1,2,3$ (fig. 1) e di $v(\pi)$ (fig. 2).

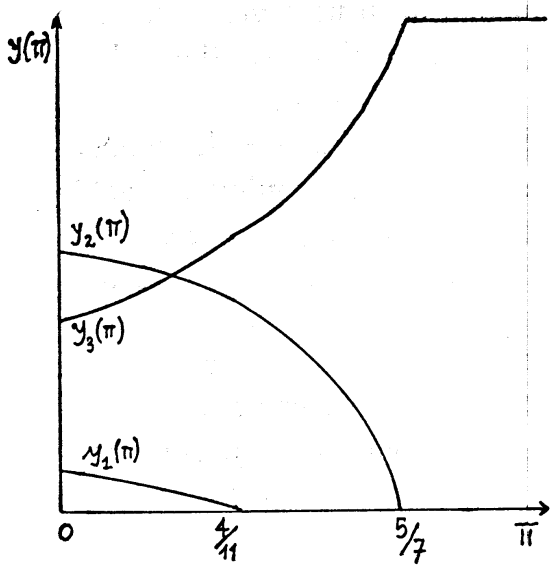

fig. 1

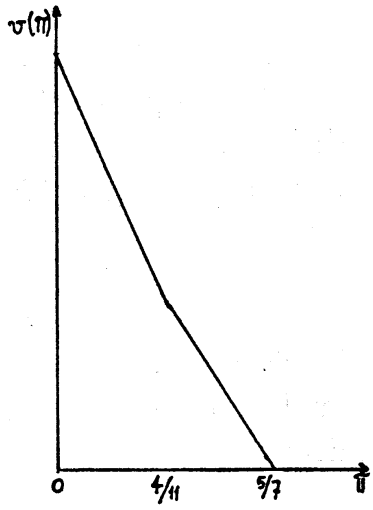

fig. 2

BIBLIOGRAFIA

[1] HARSANYI, J., *Games of incomplete Information played by Bayesian Players.* Management Science 14, 67-68.

[2] LEVINE, P. e PONSSARD J. P., *The values of Information in some non zero Sum Games.* Int. Journal of Game Theory 6, 1977; 221-229.

[3] LUCE, D. e RAIFFA, H., *Games and Decisions.* New York 1957.

[4] PONSSARD, J., *On the Concept of the Value of Information in Competitive Situations.* Management Science 22, 1976; 739-747.