DIFFERENTIALOPERATOREN BEI EINER INHOMOGENEN ELLIPTISCHEN DIFFERENTIALGLEICHUNG (*)

von KARL WILHELM BAUER und GERHARD JANK (in Graz) (**)

SOMMARIO. - *In questa nota si studia l'equazione differenziale*

$$F(z, \bar{z})\, w_{z\bar{z}} - n(n+1)\, w = \Phi(z, \bar{z}), \qquad n \in \mathbb{N},$$

dove F è una soluzione complessa o reale dell'equazione differenziale non lineare

$$F(\log F)_{z\bar{z}} + 2 = 0.$$

Si esamina anzitutto il caso omogeneo $\Phi \equiv 0$, *stabilendo dei teoremi generali non ricorrenti di rappresentazione per le soluzioni complesse o reali definite in domini semplicemente connessi. Successivamente si assegnano delle soluzioni dell'equazione non omogenea, con*

$$\Phi = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{m} \Phi_k(z, \bar{z}),$$

dove le funzioni Φ_k *sono soluzioni arbitrarie dell'equazione differenziale omogenea*

$$F\, \Phi_{k, z\bar{z}} - k(k+1)\, \Phi_k = 0.$$

Nell'ultima parte si esamina il caso particolare della risonanza $(k = n)$.

(*) Pervenuto in Redazione il 9 febbraio 1971.

(**) Indirizzo degli Autori: 1. Lehrkanzel und Institut für Mathematik, Technische Hochschule — A 8010 Graz, Kopernikusgasse 24 (Österreich).

SUMMARY. - *This paper deals with the differential equation*

$$F(z,\bar z)\, w_{z\bar z} - n(n+1)\, w = \Phi(z,\bar z), \qquad n \in \mathbb{N},$$

where F is a complex or real solution of the nonlinear differential equation

$$F(\log F)_{z\bar z} + 2 = 0.$$

Firstly the homogeneous case $\Phi \equiv 0$ is investigated. We derive general recursion-free representation theorems for the complex and real solutions defined in simply connected domains. Then we give solutions of the inhomogeneous differential equation with

$$\Phi = \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq n}}^{m} \Phi_k(z,\bar z),$$

where the functions Φ_k are arbitrary solutions of the homogeneous differential equation

$$F\Phi_{k,\,z\bar z} - k(k+1)\,\Phi_k = 0.$$

In the last section the special case of resonance ($k = n$) is investigated.

1. Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit wird die inhomogene Differentialgleichung

$$\text{(1)} \qquad F w_{z\bar z} - n(n+1)\, w = \Phi(z,\bar z), \qquad n \in \mathbb{N}\ [1],$$

behandelt. Dabei bezeichnet F eine Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung

$$\text{(2)} \qquad F(\log F)_{z\bar z} + 2 = 0,$$

während der inhomogene Anteil $\Phi(z,\bar z)$ die Form

$$\Phi(z,\bar z) = \sum_{k=0}^{m} \Phi_k(z,\bar z)$$

[1] Mit $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ wird die Menge der natürlichen, reellen bzw. komplexen Zahlen bezeichnet.

besitzt, wobei die Summanden Φ_k Lösungen der homogenen Differentialgleichungen

$$F\,\Phi_{k,z\bar{z}} - k\,(k+1)\,\Phi_k = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, m,$$

darstellen.

Es wird zunächst die homogene Differentialgleichung

$$Fw_{z\bar{z}} - n\,(n+1)\,w = 0 \qquad n \in \mathfrak{N}, \tag{3}$$

betrachtet. Für die in einfach zusammenhängenden Gebieten $\mathfrak{G}$ definierten Lösungen dieser Differentialgleichung ist in [4] ein allgemeiner Darstellungssatz hergeleitet worden (²). Dabei wird von Differentialoperatoren E und E^* Gebrauch gemacht (vergl. (28) und (29)), die zwei in $\mathfrak{G}$ holomorphe Funktionen $g\,(z)$ und $h\,(z)$ auf eine Lösung

$$w = Eg + \overline{E^*h} \tag{4}$$

von (3) abbilden. Umgekehrt lässt sich jede in $\mathfrak{G}$ definierte Lösung von (3) in der Form (4) mit geeigneten in G holomorphen Funktionen $g\,(z)$ und $h\,(z)$ darstellen (Satz 2). Die Handhabung der Operatoren E und E^* wird jedoch dadurch erheblich erschwert, dass ihre Anwendung auf holomorphe Funktionen durch komplizierte Rekursionsformeln definiert ist (vergl. (25) und (26)). Im folgenden wird nun in Verallgemeinerung gewisser Resultate, die im Zusammenhang mit der Differentialgleichung

$$(1 + \varepsilon\, z\, \bar{z})^2\, w_{z\bar{z}} + \varepsilon\, n\,(n+1)\,w = 0, \quad n \in \mathfrak{N}, \quad \varepsilon = \pm 1, \tag{5}$$

gewonnen wurden, eine allgemeine rekursionsfreie Darstellung für die Lösungen von (3) hergeleitet. Alle in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{G}$ definierten Lösungen von (5) lassen sich mit Hilfe des in [1] definierten Operators

$$\widehat{E} := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-\varepsilon)^{n-k}\,(2n-k)!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{\bar{z}}{1+\varepsilon\, z\,\bar{z}}\right)^{n-k} \frac{d^k}{dz^k} \tag{6}$$

(²) Eine Darstellung der Lösungen mit Hilfe von Integraloperatoren wurde in [5] und [6] behandelt.

in der Form

$$w = \widehat{E}\,g + \overline{\widehat{E}\,h}, \qquad g(z) \text{ und } h(z) \text{ hol. in } \mathfrak{G}, \tag{7}$$

angeben. Wie St. Ruscheweyh gezeigt hat (3), gilt darüber hinaus

$$\widehat{E}\,g + \overline{\widehat{E}\,h} = (1 + \varepsilon z \bar{z})^{n+1} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(\frac{g(z)}{(1 + \varepsilon z \bar{z})^{n+1}} \right) + \right. \tag{8}$$

$$\left. + \frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n} \left(\frac{\overline{h(z)}}{(1 + \varepsilon z \bar{z})^{n+1}} \right) \right\}.$$

Eine entsprechende Darstellung lässt sich auch für die Lösungen der Differentialgleichung (3) erzielen (Hilfssatz 3, Formel (45)). Damit eröffnet sich die Möglichkeit, die Lösungen von (3) mit Hilfe geeigneter Differentialoperatoren rekursionsfrei darzustellen (Satz 3) (4).

Im Anschluss daran wird die inhomogene Differentialgleichung (1) betrachtet (Kap. 3). Da es sich bei (1) um eine lineare Differentialgleichung handelt, genügt es mit Rücksicht auf den für die homogene Differentialgleichung gewonnenen Darstellungssatz, eine partikuläre Lösung zu bestimmen. In [3] war für die Lösungen der Differentialgleichung

$$(1 + \varepsilon z \bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n (n+1) w = \Phi(z, \bar{z}), \qquad n \in \mathfrak{N}, \quad \varepsilon = \pm 1, \tag{9}$$

mit

$$\Phi(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \varphi_k(z) \left(\frac{\bar{z}}{1 + \varepsilon z \bar{z}} \right)^k + \overline{\psi_k(z)} \left(\frac{z}{1 + \varepsilon z \bar{z}} \right)^k \right\},$$

$$\varphi_k(z),\ \psi_k(z) \text{ hol. in } \mathfrak{G},$$

ein allgemeiner Darstellungssatz hergeleitet worden. Dieses Resultat wird im folgenden auf die Lösungen der Differentialgleichung (1) verallgemeinert. Dabei wird davon Gebrauch gemacht, dass sich der inhomogene Anteil als Summe von Lösungen der homogenen Diffe-

(3) Steiermärkisches mathematisches Symposium 1970.

(4) Eine Untersuchung der funktionentheoretischen Eigenschaften der Lösungen von (5) wird durch St. Ruscheweyh in [8] und [9] behandelt. Eine Darstellung dieser Lösungen unter Verwendung von Integraloperatoren wird von H. Kracht und E. Kreyszig in [7] gegeben.

rentialgleichung

$$F w_{z\bar{z}} - k(k+1) w = 0 \tag{10}$$

mit

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

darstellen lässt. Darüber hinaus werden partikuläre Lösungen von (1) für den Fall

$$\Phi(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{m} \Phi_k(z, \bar{z}) \tag{11}$$

ermittelt, wobei die Funktionen Φ_k Lösungen der homogenen Differentialgleichung (10) darstellen, während m eine beliebige natürliche Zahl bezeichnet. Die gesuchten partikulären Lösungen von (1) lassen sich sodann — wenn man von $k = n$ absieht — als eine gewisse Linearkombination der Summanden Φ_k angeben. Eine besondere Untersuchung ist im Fall der Resonanz erforderlich, d. h. wenn $\Phi(z, \bar{z})$ eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung darstellt. Auch hier lässt sich unter gewissen Voraussetzungen noch eine partikuläre Lösung ermitteln (Kap. 4).

2. Ein allgemeiner Darstellungssatz für die Lösungen der homogenen Differentialgleichung.

Wir stellen im folgenden zunächst einige der in [4] gewonnenen Ergebnisse zusammen. G bezeichne ein einfach zusammenhängendes Gebiet der komplexen Zahlenebene. Wir verwenden die Differentialoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

und bezeichnen mit

$$[\varphi]_z = \left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2$$

die Schwarzsche Derivierte von $\varphi(z)$ bezüglich z. Dann gilt (vergleiche [4], Satz 2) der folgende

Satz 1

a) Jede in $\mathfrak{G}$ definierte Lösung der Differentialgleichung (2)

$$F(\log F)_{z\bar{z}} + 2 = 0$$

lässt sich gemäss

$$F = \frac{[\varphi(z) + \overline{\psi(z)}]^2}{\varphi'(z)\overline{\psi'(z)}} \tag{12}$$

mit geeigneten in $\mathfrak{G}$ holomorphen bzw. meromorphen Funktionen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ darstellen, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{(i) } \varphi(z) \textit{ und } \psi(z) \textit{ besitzen in } \mathfrak{G} \textit{ nur endlich viele Polstellen} \\ \quad\textit{von höchstens erster Ordnung.} \\ \text{(ii) } \varphi(z) \textit{ und } \psi(z) \textit{ haben keine gemeinsamen Polstellen in } \mathfrak{G}. \\ \text{(iii) } [\varphi(z) + \overline{\psi(z)}]\,\varphi'(z)\,\psi'(z) \neq 0 \textit{ in } \mathfrak{G}. \end{array}\right. \tag{13}$$

b) Andererseits stellt (12) *für jedes Paar von in $\mathfrak{G}$ holomorphen bzw. meromorphen Funktionen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$, die den Bedingungen* (13) *genügen, eine Lösung von* (2) *in $\mathfrak{G}$ dar.*

c) Bei gegebener Lösung F sind die in $\mathfrak{G}$ holomorphen Funktionen

$$h_1(z) = [\varphi]_z \quad \textit{und} \quad h_2(z) = [\psi]_z \tag{14}$$

eindeutig gemäss

$$h_1(z) = \frac{(F_z)^2 - 2F\,F_{zz}}{2F^2}, \tag{15}$$

$$h_2(z) = \frac{(\overline{F}_z)^2 - 2\,\overline{F}\,\overline{F}_{zz}}{2\,\overline{F}^2} \tag{16}$$

bestimmt. Die Erzeugenden $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ sind bei Vorgabe der Lösung F nicht eindeutig festgelegt. Man erhält das allgemeinste Erzeugendenpaar $\tilde{\varphi}(z)$ und $\tilde{\psi}(z)$ durch

$$\tilde{\varphi}(z) = \frac{a_{11}\,\varphi - a_{12}}{-\,a_{21}\,\varphi + a_{22}}, \qquad \tilde{\psi}(z) = \frac{\overline{a_{11}}\,\psi + \overline{a_{12}}}{\overline{a_{21}}\,\psi + \overline{a_{22}}} \tag{17}$$

mit

$$a_{ik} \in \mathfrak{C}, \quad a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} = \pm 1.$$

d) Jede in $\mathfrak{G}$ definierte reellwertige Lösung von (2) *lässt sich gemäss*

$$F = \frac{[1 + \varepsilon f(z) \overline{f(z)}]^2}{-\varepsilon f'(z) \overline{f'(z)}}, \qquad \varepsilon = \pm 1, \tag{18}$$

mit einer geeigneten in $\mathfrak{G}$ holomorphen bzw. meromorphen Funktion $f(z)$ darstellen, die den folgenden Bedingungen genügt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } f(z) \textit{ besitzt in } \mathfrak{G} \textit{ nur endlich viele Polstellen von höchstens} \\ \quad \textit{erster Ordnung.} \\ \text{(ii) } [1 + \varepsilon f(z) \overline{f(z)}] f'(z) \neq 0 \text{ in } \mathfrak{G}. \end{array} \right. \tag{19}$$

e) Umgekehrt stellt (18) *für jede in $\mathfrak{G}$ holomorphe bzw. meromorphe Funktion $f(z)$, die den Bedingungen* (19) *genügt, eine reellwertige Lösung von* (2) *in $\mathfrak{G}$ dar.*

f) Bei gegebener reellwertiger Lösung F ist die in $\mathfrak{G}$ holomorphe Funktion

$$[f]_z = \frac{(F_z)^2 - 2F F_{zz}}{2F^2} \tag{20}$$

eindeutig bestimmt. Die Erzeugende $f(z)$ ist bei Vorgabe der reellwertigen Lösung F nicht eindeutig festgelegt. Man erhält die allgemeinste Erzeugende $\tilde{f}(z)$ durch

$$\tilde{f}(z) = \eta \frac{f(z) - a}{1 + \varepsilon \bar{a} f(z)} \text{ mit } |\eta| = 1 \text{ und } \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 1: \ a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \\ \varepsilon = -1: \ |a| < 1. \end{array} \right. \tag{21}$$

Wir betrachten nun die homogene Differentialgleichung (3)

$$F w_{z\bar{z}} - n(n+1) w = 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

wobei F eine Lösung von (2) in $\mathfrak{G}$ bezeichnet. In [4] wurde gezeigt, dass sich die in $\mathfrak{G}$ definierten Lösungen von (3) in der Form

$$w = \sum_{k=0}^{n} \{ g_k(z) \tau^{n-k} + \overline{h_k(z)} \sigma^{n-k} \} \tag{22}$$

mit

$$\tau = \frac{-F_z}{2F} = \frac{-\varphi'(z)}{\varphi(z) + \overline{\psi(z)}} + \frac{\varphi''(z)}{2\varphi'(z)}, \tag{23}$$

$$\sigma = \frac{-F_{\bar z}}{2F} = \frac{-\overline{\psi'(z)}}{\varphi(z) + \overline{\psi(z)}} + \frac{\overline{\psi''(z)}}{2\,\overline{\psi'(z)}} \tag{24}$$

darstellen lassen. Für die Funktionen $g_k(z)$ und $h_k(z)$ gilt:

$$\left\{\begin{array}{l} g_0(z) = \dfrac{(2n)!}{n!}\, g(z), \qquad g(z) \text{ hol. in } \mathfrak{G}, \\[2ex] g_k(z) = \dfrac{n-k+1}{k(2n-k+1)} \{ g'_{k-1}(z) + (n-k+2)\, \Phi(z)\, g_{k-2}(z) \}, \\[2ex] k = 1, \ldots, n, \; g_{-1}(z) \equiv 0, \end{array}\right. \tag{25}$$

$$\left\{\begin{array}{l} h_0(z) = \dfrac{(2n)!}{n!}\, h(z), \qquad h(z) \text{ hol. in } \mathfrak{G}, \\[2ex] h_k(z) = \dfrac{n-k+1}{k(2n-k+1)} \{ h'_{k-1}(z) + (n-k+2)\, \Psi(z)\, h_{k-2}(z) \}, \\[2ex] k = 1, \ldots, n, \; h_{-1}(z) \equiv 0. \end{array}\right. \tag{26}$$

Dabei bezeichnen $\Phi(z)$ und $\Psi(z)$ die in $\mathfrak{G}$ holomorphen Funktionen

$$\Phi(z) = \left(\frac{-F_z}{2F}\right)_z - \left(\frac{-F_z}{2F}\right)^2, \; \Psi(z) = \left(\frac{-\bar F_z}{2\bar F}\right)_z - \left(\frac{-\bar F_z}{2\bar F}\right)^2. \tag{27}$$

Durch (25) bzw. (26) werden Operatoren definiert, durch die aus einer beliebigen in $\mathfrak{G}$ holomorphen Funktion $g(z)$ bzw. $h(z)$ eine in $\mathfrak{G}$ definierte Lösung von (3) erzeugt wird. Diese Operatoren werden in [4], Formel (19) und (23), mit E bzw. E^* bezeichnet:

$$Eg := \sum_{k=0}^{n} g_k(z)\, \tau^{n-k} \text{ mit } g_k(z) \text{ gemäss (25)}, \tag{28}$$

$$\overline{E^* h} := \sum_{k=0}^{n} \overline{h_k(z)}\, \sigma^{n-k} \text{ mit } h_k(z) \text{ gemäss (26)}. \tag{29}$$

Mit Hilfe der Operatoren

$$D^0 w = w, D = F \frac{\partial}{\partial \bar z}, D^{k+1} = DD^k, k \in \mathfrak{N}, \tag{30}$$

und

$$d^0 w = w, d = \bar F \frac{\partial}{\partial z}, d^{k+1} = dd^k, k \in \mathfrak{N}, \tag{31}$$

lautet sodann der in [4] gewonnene allgemeine Darstellungssatz (vergl. [4], Satz 1) wie folgt:

Satz 2

Sei $\mathfrak{G}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet der komplexen Zahlenebene. F sei Lösung der Differentialgleichung

$$F(\log F)_{z\bar{z}} + 2 = 0$$

in $\mathfrak{G}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

a) *Zu jeder in $\mathfrak{G}$ definierten Lösung der Differentialgleichung* (3)

$$Fw_{z\bar{z}} - n(n+1)w = 0, \quad n \in \mathfrak{N},$$

gibt es in $\mathfrak{G}$ holomorphe Funktionen $g(z)$ und $h(z)$, so dass

$$w = Eg + \overline{E^* h}. \tag{32}$$

b) *Umgekehrt stellt* (32) *für jedes Paar von in $\mathfrak{G}$ holomorphen Funktionen $g(z)$ und $h(z)$ eine Lösung von* (3) *in $\mathfrak{G}$ dar.*

c) *Bei vorgegebener Lösung w sind die Funktionen*

$$G(z) = \frac{d^{n+1} w}{F^{n+1}} \quad \text{und} \quad H(z) = \overline{\left(\frac{D^{n+1} w}{F^{n+1}}\right)} \tag{33}$$

eindeutig bestimmt. Die Erzeugenden $g(z)$ und $h(z)$ sind bei Vorgabe von w nicht eindeutig festgelegt. Man erhält das allgemeinste Erzeugendenpaar $\tilde{g}(z)$ und $\tilde{h}(z)$ durch

$$\tilde{g}(z) = g(z) + \sum_{\mu=1}^{2n+1} B_\mu g_\mu^*(z), \; B_\mu \in \mathfrak{C}, \tag{34}$$

und

$$\tilde{h}(z) = h(z) + \sum_{\mu=1}^{2n+1} C_\mu h_\mu^*(z), \; C_\mu \in \mathfrak{C}, \tag{35}$$

mit

$$\sum_{\mu=1}^{2n+1} \{B_\mu (Eg_\mu^*) + \overline{C_\mu (E^* h_\mu^*)}\} = 0. \tag{36}$$

Dabei stellen die Funktionen $g_\mu^*(z)$ und $h_\mu^*(z)$ ein Fundamentalsystem der linearen Differentialgleichung

$$d^{n+1}(Eg) = 0 \;\; bzw. \;\; \overline{D^{n+1}(\overline{E^* h})} = 0$$

in $\mathfrak{G}$ dar.

d) Liegt eine Lösung w von (3) vor, die sich in der Form

$$w = Eg$$

(d. h. mit einer Erzeugenden $g(z)$ allein) darstellen lässt, so ist diese Erzeugende eindeutig gemäss

$$g(z) = \frac{D^n w}{(2n)!}$$

bestimmt.

Liegt eine Lösung w von (3) vor, die sich in der Form

$$w = \overline{E^* h}$$

darstellen lässt, so ist die Erzeugende $h(z)$ eindeutig gemäss

$$h(z) = \frac{\overline{d^n w}}{(2n)!}$$

bestimmt.

Die unter *d)* angeführte Aussage folgt sofort unter Berücksichtigung von Hilfssatz 2 in [4].

Um zu einer rekursionsfreien Lösungsdarstellung zu kommen, definieren wir die Operatoren

$$R^0 w = w, R = \frac{1}{\varphi'(z)} \frac{\partial}{\partial z}, R^{k+1} = R R^k, k \in \mathfrak{N},$$

(37)

$$S^0 w = w, S = \frac{1}{\overline{\psi'(z)}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, S^{k+1} = S S^k, k \in \mathfrak{N},$$

wobei $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ die in (12) auftretenden Erzeugenden der Funktion F bezeichnen. Mit Hilfe dieser Operatoren lässt sich die Differentialgleichung (3) in der Form

$$\omega^2 RSw - n(n+1) w = 0$$

schreiben, wenn man noch

(38) $$\omega = \varphi(z) + \overline{\psi(z)}$$

verwendet. Wir bezeichnen mit $m(\varphi, \mathfrak{G})$ bzw. $m(\psi, \mathfrak{G})$ die Menge der Polstellen von $\varphi(z)$ bzw. $\psi(z)$ in $\mathfrak{G}$.

(39) $$M_{2n}(\varphi, G) \text{ bzw. } M_{2n}(\psi, \mathfrak{G})$$

sei die Menge der in $\mathfrak{G}$ holomorphen bzw. meromorphen Funktionen mit nur endlich vielen Polstellen, die höchstens in solchen Punkten auftreten, in denen auch die Funktion $\varphi(z)$ bzw. $\psi(z)$ Polstellen besitzt, und deren Ordnung $\leq 2n$ ist.

Hilfssatz 1

Für jede Funktion $g(z) \in M_{2n}(\varphi, \mathfrak{G})$ *gilt*

$$\omega^{n+1} R^n \left(\frac{g(z)}{\omega^{n+1}}\right) = \sum_{k=0}^{n} A_k^n \frac{R^k g}{\omega^{n-k}} \tag{40}$$

mit

$$A_k^n = \frac{(-1)^{n-k}(2n-k)!}{k!\,(n-k)!} \tag{41}$$

für alle $z \in \mathfrak{G} - m(\varphi, \mathfrak{G})$.

Der Beweis wird durch vollständige Induktion geführt. Mit $n = 1$ erhält man

$$\omega^2 R\left(\frac{g}{\omega^2}\right) = \sum_{k=0}^{1} A_k^1 \frac{R^k g}{\omega^1 - k} = Rg - \frac{2g}{\omega}.$$

Wendet man auf die Induktionsvoraussetzung unter Berücksichtigung von

$$R\left(\frac{g}{\omega^{n+1}}\right) = \frac{Rg}{\omega^{n+1}} - (n+1)\frac{g}{\omega^{n+2}} \tag{42}$$

den Operator R^2 an, so erhält man

$$(n+1) R^{n+1}\left(\frac{g}{\omega^{n+2}}\right) = R^{n+1}\left(\frac{Rg}{\omega^{n+1}}\right) - \sum_{k=0}^{n} A_k^n R^2\left(\frac{R^k g}{\omega^{2n+1-k}}\right).$$

Unter erneuter Verwendung der Induktionsvoraussetzung mit Rg an Stelle von g folgt nach geeigneter Zusammenfassung und Multiplikation mit ω^{n+2}

$$\omega^{n+2} R^{n+1}\left(\frac{g}{\omega^{n+2}}\right) = \sum_{k=0}^{n+1} A_k^{n+1}\left(\frac{R^k g}{\omega^{n+1-k}}\right).$$

Hilfssatz 2

Für jede Funktion $g(z) \in M_{2n}(\varphi, \mathfrak{G})$ stellt

$$w = \omega^{n+1} R^n \left(\frac{g}{\omega^{n+1}}\right) = \sum_{k=0}^{n} A_k^n \frac{R^k g}{\omega^{n-k}} \tag{43}$$

eine Lösung von (3) in $\mathfrak{G} - m(\varphi, \mathfrak{G})$ dar.

Der Beweis dieser Aussage folgt sofort, wenn man $\omega^2 RSw$ bildet und in (3) einsetzt.

Hilfssatz 3

Für jede Funktion $g(z) \in M_{2n}(\varphi, \mathfrak{G})$ *stellt*

$$f(z) = \frac{g(z)}{[\varphi'(z)]^n} \tag{44}$$

eine in $\mathfrak{G} - m(\varphi, \mathfrak{G})$ *holomorphe und für alle* $z \in m(\varphi, \mathfrak{G})$ *holomorph ergänzbare Funktion dar, und es gilt*

$$\omega^{n+1} R^n \left(\frac{(\varphi')^n f}{\omega^{n+1}} \right) = Ef \tag{45}$$

im gesamten Gebiet $\mathfrak{G}$.

Auf Grund der Eigenschaften der Funktion $g(z)$ stellt $f(z)$ eine für alle $z \in \mathfrak{G} - m(\varphi, \mathfrak{G})$ holomorphe Funktion dar. Bezeichnet z_0 einen Punkt der Menge $m(\varphi, \mathfrak{G})$, so gilt in einer genügend kleinen in z_0 punktierten Umgebung $U(z_0) \subset \mathfrak{G}$

$$|f(z)| < C, \; C \text{ konst.}$$

Damit ist $f(z)$ nach einem bekannten Satz der klassischen Funktionentheorie in z_0 holomorph ergänzbar. Nach Satz 2, *d* gilt andererseits: Ist eine Lösung w von (3) mit einer Erzeugenden allein in der Form $w = Ef$ darstellbar, so ist die Erzeugende $f(z)$ eindeutig bestimmt und folgt gemäss

$$f(z) = \frac{D^n w}{(2n)!}.$$

Nach Hilfssatz 2 stellt

$$w = \omega^{n+1} R^n \left(\frac{(\varphi')^n f}{\omega^{n+1}} \right) = \sum_{k=0}^{n} A_k^n \frac{R^k((\varphi')^n f)}{\omega^{n-k}} \tag{46}$$

eine Lösung von (3) in $\mathfrak{G} - m(\varphi, \mathfrak{G})$ dar. Wendet man auf die rechte Seite von (46) den Operator D s-mal an, so folgt

$$D^s w = \sum_{k=0}^{n-s} \frac{A_k^n (-1)^s (n-k)!}{(\varphi')^s (n-k-s)!} \frac{R^k((\varphi')^n f)}{\omega^{n-k-s}}.$$

$s = n$ liefert sodann

$$D^n w = \frac{(-1)^n n! A_0^n}{(\varphi')^n} (\varphi')^n f = (2n)! f(z)$$

bzw.

$$f(z) = \frac{D^n w}{(2n)!}.$$

Damit gilt die Relation (45) für alle $z \in \mathfrak{G} - m(\varphi, \mathfrak{G})$. Da f jedoch eine im gesamten Gebiet $\mathfrak{G}$ holomorphe Funktion darstellt, liegt nach Satz 2,*b* mit $w = Ef$ eine in $\mathfrak{G}$ definierte Lösung von (3) vor. Aus Stetigkeitsgründen folgt nun, dass die Funktion

$$\omega^{n+1} R^n \left(\frac{(\varphi')^n f}{\omega^{n+1}} \right)$$

in jedem Punkt $z_0 \in m(\varphi, \mathfrak{G})$ eindeutig ergänzbar ist. Damit stellt

$$w = \omega^{n+1} R^n \left(\frac{(\varphi')^n f}{\omega^{n+1}} \right) = Ef \tag{47}$$

eine im gesamten Gebiet $\mathfrak{G}$ definierte Lösung von (3) dar.

Ist umgekehrt $f(z)$ eine beliebige in $\mathfrak{G}$ holomorphe Funktion, so gilt

$$g(z) = (\varphi')^n f(z) \in M_{2n}(\varphi, \mathfrak{G}).$$

Damit lassen sich alle Lösungen

$$w = Ef, \; f(z) \text{ bel. hol. in } \mathfrak{G},$$

in der Form (47) darstellen. Ganz analog erhält man eine Darstellung für die Lösungen

$$w = \overline{E^* f^*}, \; f^*(z) \text{ bel. hol. in } \mathfrak{G},$$

unter Verwendung des Operators S; und zwar gilt

$$w = \omega^{n+1} S^n \left(\frac{\overline{(\psi')^n f^*}}{\omega^{n+1}} \right) = \overline{E^* f^*}. \tag{48}$$

Wir gehen nun von zwei beliebigen Funktionen

$$g(z) \in M_{2n}(\varphi, \mathfrak{G}) \text{ und } h(z) \in M_{2n}(\psi, \mathfrak{G})$$

aus. Dann stellt unter Verwendung von Satz 2, *b*

$$w = \omega^{n+1} \left\{ R^n \left(\frac{g(z)}{\omega^{n+1}} \right) + S^n \left(\overline{\frac{h(z)}{\omega^{n+1}}} \right) \right\} \tag{49}$$

eine Lösung von (3) in $\mathfrak{G}$ dar. Umgekehrt gibt es (Satz 2, *a*) zu jeder in $\mathfrak{G}$ definierten Lösung w von (3) ein Paar von Funktionen

$$g(z) \in M_{2n}(\varphi, \mathfrak{G}), \quad h(z) \in M_{2n}(\psi, \mathfrak{G}), \tag{50}$$

so dass sich w in der Form (49) darstellen lässt.

Zur Vereinfachung der Schreibweise definieren wir zwei Operatoren H_n und H_n^* durch

$$H_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k^n}{\omega^{n-k}} R^k, \quad H_n^* := \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k^n}{\omega^{n-k}} S^k. \tag{51}$$

Bezeichnen nun $g(z)$ und $h(z)$ zwei Funktionen, die der Bedingung (50) genügen, so erhält man unter Berücksichtigung der Hilfssätze 1 bis 3 und der analogen Aussagen bezüglich des Operators H_n^* an Stelle von (49)

$$w = H_n g + H_n^* \bar{h}. \tag{52}$$

Bezüglich der Null-Lösungen lassen sich nun, verglichen mit den in [4] formulierten Ergebnissen, erheblich weitergehende Aussagen gewinnen. Wir verwenden die Operatoren P und Q, die wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} P &= \omega^2 R, \quad P^{k+1} = P P^k, \quad k \in \mathfrak{N}, \\ Q &= \omega^2 S, \quad S^{k+1} = S S^k, \quad k \in \mathfrak{N}. \end{aligned} \tag{53}$$

Für eine Lösung w der Form (52) gilt dann

$$P^{n+1} w = \omega^{2n+2} R^{2n+1} g, \quad Q^{n+1} w = \omega^{2n+2} S^{2n+1} \bar{h}, \tag{54}$$

wie man durch vollständige Induktion zeigt. Bei vorgegebener Lösung w sind damit die Funktionen $R^{2n+1} g$ und $S^{2n+1} \bar{h}$ eindeutig bestimmt.

Die Null-Lösungen lassen sich unter Berücksichtigung von (52) in der Form

$$w = \sum_{k=0}^{n} A_k^n \frac{R^k g + S^k \bar{h}}{\omega^{n-k}} = 0 \tag{55}$$

mit gewissen Funktionen $g(z)$ und $h(z)$ erzeugen. Unter Verwendung von (54) gilt hier

$$R^{2n+1}\, g(z) = 0 \tag{56}$$

und

$$S^{2n+1}\, \overline{h(z)} = 0 \tag{57}$$

Damit haben die Funktionen $g(z)$ und $h(z)$ notwendig die Form

$$g(z) = \sum_{\mu=0}^{2n} a_\mu\, \varphi^\mu, \quad h(z) = \sum_{\mu=0}^{2n} b_\mu\, \psi^\mu, \quad a_\mu, b_\mu \in \mathbb{C}. \tag{58}$$

Unter Berücksichtigung von (55) und (58) folgt wiederum durch Induktion

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{\mu=k}^{n+k} \binom{\mu}{k} \binom{2n-\mu}{n-k} \left\{ a_\mu\, \overline{\psi}^k\, \varphi^{\mu-k} + \overline{b}_\mu\, \varphi^k\, \overline{\psi}^{\mu-k} \right\} = 0. \tag{59}$$

Ordnet man nach Potenzen von $\overline{\psi}$, so erhält man durch t-fache Anwendung von R

$$\sum_{s=0}^{n} (-1)^s\, \overline{\psi}^s \sum_{k=t}^{n} \frac{\varphi^{k-t}\, k!}{(k-t)!} \binom{k+s}{k} \binom{2n-k-s}{n-k} \cdot \left\{ a_{k+s} + (-1)^{k+s}\, \overline{b_{k+s}} \right\} = 0. \tag{60}$$

Berücksichtigt man, dass $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ abgesehen von den in Satz 1, a genannten Bedingungen frei wählbar sind, so folgt

$$b_k = (-1)^{k+1}\, \overline{a_k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Ordnet man (59) nach Potenzen von $\overline{\psi}$, so erhält man nach n-facher Anwendung von S und μ-facher Anwendung von R

$$\sum_{k=\mu}^{n} \frac{k!}{(k-\mu)!} \binom{k+n}{k} \left\{ a_{k+n} + (-1)^{k+n}\, \overline{b_{k+n}} \right\} = 0. \tag{61}$$

Damit folgt

$$b_{n+k} = (-1)^{n+k+1}\, \overline{a_{n+k}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Für die Koeffizienten a_μ und b_μ in (58) gilt also notwendig

$$b_k = (-1)^{k+1}\, \overline{a}_k, \quad k = 0, 1, \ldots, 2n. \tag{62}$$

Setzt man b_k gemäss (62) in (59) ein, so zeigt sich, wenn man noch nach Potenzen von ψ ordnet, dass (59) für beliebige Funktionen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ identisch erfüllt ist. Damit sind die Bedingungen (62) auch hinreichend.

Berücksichtigt man noch, dass für die Operatoren P, Q, d und D die folgenden Relationen gelten:

$$d = \frac{1}{\overline{\psi'(z)}} P, \quad D = \frac{1}{\varphi'(z)} Q, \tag{63}$$

so gilt für eine Lösung

$$w_1 = H_n g \text{ bzw. } w_2 = H_n^* \overline{h}$$

unter Verwendung von Satz 2, d

$$g(z) = \frac{Q^n w_1}{(2n)!}, \quad h(z) = \frac{\overline{P^n w_2}}{(2n)!}. \tag{64}$$

Damit gilt für die Lösungen der Differentialgleichung (3) der folgende allgemeine Darstellungssatz:

Satz 3

$\mathfrak{G}$ sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet der komplexen Zahlenebene.

$F(z, \overline{z})$ sei eine Lösung der Differentialgleichung

$$F(\log F)_{z\overline{z}} + 2 = 0$$

und habe die Darstellung

$$F = \frac{[\varphi(z) + \overline{\psi(z)}]^2}{\varphi'(z)\,\overline{\psi'(z)}},$$

wobei die Erzeugenden $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ den in Satz 1, a genannten Bedingungen genügen.

$M_{2n}(\varphi, \mathfrak{G})$ und $M_{2n}(\psi, \mathfrak{G})$ seien die durch (39) *erklärten Klassen von Funktionen. R, S, P, Q, H_n und H_n^* seien die durch* (37), (53) *und* (51) *definierten Operatoren. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

a) Zu jeder in $\mathfrak{G}$ definierten Lösung w der Differentialgleichung (3)

$$F w_{z\overline{z}} - n(n+1) w = 0, \; n \in \mathfrak{N},$$

gibt es zwei Funktionen

$$g(z) \in M_{2n}(\varphi, \mathfrak{G}) \text{ und } h(z) \in M_{2n}(\psi, \mathfrak{G}),$$

so dass

$$w = H_n\, g + H_n^*\, \overline{h}. \tag{65}$$

b) Umgekehrt stellt (65) *für jedes Paar von Funktionen* $g(z) \in M_{2n}(\varphi, \mathfrak{G})$ *und* $h(z) \in M_{2n}(\psi, \mathfrak{G})$ *eine Lösung von* (3) *in* $\mathfrak{G}$ *dar.*

c) Bei vorgegebener Lösung w *sind die Funktionen* $R^{2n+1}\, g$ *und* $S^{2n+1}\, \overline{h}$ *eindeutig gemäss*

$$R^{2n+1}\, g = \frac{P^{n+1}\, w}{\omega^{2n+2}}, \quad S^{2n+1}\, \overline{h} = \frac{Q^{n+1}\, w}{\omega^{2n+2}} \tag{66}$$

bestimmt. Die Erzeugenden $g(z)$ *und* $h(z)$ *sind bei Vorgabe von* w *nicht eindeutig festgelegt. Man erhält das allgemeinste Erzeugendenpaar* $\tilde{g}(z)$ *und* $\tilde{h}(z)$ *durch*

$$\tilde{g}(z) = g(z) + \sum_{\mu=0}^{2n} a_\mu\, \varphi^\mu, \quad \tilde{h}(z) = h(z) - \sum_{\mu=0}^{2n} (-1)^\mu\, \overline{a}_\mu\, \psi^\mu, \quad a_\mu \in \mathbb{C}. \tag{67}$$

d) Für jede in $\mathfrak{G}$ *definierte Lösung* w*, die sich mit einer Erzeugenden* $g(z)$ *oder* $h(z)$ *allein darstellen lässt, ist diese Funktion eindeutig durch*

$$g(z) = \frac{Q^n\, w}{(2n)!} \tag{68}$$

bzw.

$$h(z) = \frac{\overline{P^n\, w}}{(2n)!} \tag{69}$$

bestimmt.

Korollar

Wegen der Gleichungen (66) *sind die Funktionen*

$$R^{2n+1}\, g \quad \text{und} \quad \overline{S^{2n+1}\, \overline{h}}$$

für eine in einem (nicht notwendig einfach zusammenhängenden) Gebiet $\mathfrak{G}$ *definierte Lösung* w *von* (3) *in jedem Punkt von* $\mathfrak{G}$ *eindeutig bestimmt und stellen in* $\mathfrak{G}$ *(global) eindeutige holomorphe Funktionen dar.*

Die Darstellung der Lösungen der Differentialgleichung (3)

$$F\, w_{z\bar{z}} - n(n+1)\, w = 0$$

mit

$$F = \frac{[\varphi(z) + \overline{\psi(z)}]^2}{\varphi'(z)\, \overline{\psi'(z)}} \tag{70}$$

lässt sich mit dem Operator H_n allein durchführen, wenn die Funktion $F(z, \bar{z})$ reellwertig ist. Nach Satz 1, d erhält man alle reellwertigen Lösungen der Differentialgleichung (2) durch

$$F = \frac{[1 + \varepsilon f(z) \overline{f(z)}]^2}{- \varepsilon f'(z) \overline{f'(z)}}, \; \varepsilon = \pm 1 \tag{71}$$

wobei die Erzeugende $f(z)$ eine in $\mathfrak{G}$ meromorphe Funktion bezeichnet, die den Bedingungen (19) genügt. Dabei folgt die Darstellung (71) aus (70) mit

$$\varphi = f, \psi = \frac{\varepsilon}{f}. \tag{72}$$

Unter Verwendung von Satz 3 haben die Lösungen in diesem Fall die Form

$$w = H_n g + H_n^* \overline{h_1} \tag{73}$$

mit

$$g \in M_{2n}(f, \mathfrak{G}), \; h_1 \in M_{2n}(f^{-1}, \mathfrak{G}) \tag{74}$$

und

$$R = \frac{1}{f'} \frac{\partial}{\partial z}, \quad S = - \frac{\varepsilon \bar{f}^2}{\bar{f}'} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

Da der Faktor $F(z, \bar{z})$ reellwertig ist, stellt mit $H_n^* \overline{h_1}$ auch $w^* = \overline{H_n^* \overline{h_1}}$ eine Lösung dar. Beachtet man noch

$$S\overline{h_1} = - \frac{\varepsilon \bar{f}^2}{\bar{f}'} \overline{h_1'}, \overline{S\overline{h_1}} = - \frac{\varepsilon f^2}{f'} h_1',$$

so folgt mit

$$S^* : = - \frac{\varepsilon f^2}{f'} \frac{\partial}{\partial z} \text{ und } \omega = \frac{1 + \varepsilon f \bar{f}}{\varepsilon \bar{f}}$$

für w^* die Darstellung

$$w^* = \sum_{k=0}^{n} A_k^n \frac{\varepsilon^{n-k} f^{n-k}}{(1 + \varepsilon f \bar{f})^{n-k}} S^{*k} h_1.$$

Es handelt sich hier um eine Lösung, die sich auch in der Form

$$w^* = H_n h$$

darstellen lässt. Man erhält die Erzeugende h unter Verwendung von Satz 3, d gemäss

$$h = \frac{Q^n w^*}{(2n)!} = (-\varepsilon)^n f^{2n} h_1 . \tag{75}$$

Dabei gilt wegen (74)

$$h \in M_{2n}(f, \mathfrak{G}).$$

Für die Lösung (73) folgt damit

$$w = H_n g + \overline{H_n h}, \quad g, h \in M_{2n}(f, \mathfrak{G}).$$

Bei vorgegebener Lösung w sind nach Satz 3, c die Funktionen

$$R^{2n+1} g = \frac{P^{n+1} w}{\omega^{2n+2}}, \quad R^{2n+1} h = \frac{P^{n+1} \overline{w}}{\omega^{2n+2}}$$

mit

$$\omega = \frac{1 + \varepsilon f \overline{f}}{\varepsilon \overline{f}}, \; P = \omega^2 \frac{1}{f'} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{[1 + \varepsilon f \overline{f}]^2}{\overline{f}^2 f'} \frac{\partial}{\partial z}$$

eindeutig bestimmt. Für eine Lösung der Form $w = H_n g$ bzw. $w = \overline{H_n h}$ ist die Erzeugende $g(z)$ bzw. $h(z)$ eindeutig bestimmt und folgt nach Satz 3, d gemäss

$$g(z) = \frac{\overline{P^n \overline{w}}}{(2n)!} \text{ bzw. } h(z) = \frac{\overline{P^n w}}{(2n)!} .$$

An die Stelle der Relationen (67) treten hier wegen (75) die Beziehungen

$$\tilde{g}(z) = g(z) + \sum_{\mu=0}^{2n} a_\mu f^\mu, \; \tilde{h}(z) = h(z) - (-\varepsilon)^n \sum_{\mu=0}^{2n} (-\varepsilon)^\mu \overline{a_\mu} f^{2n-\mu}. \tag{76}$$

Verwendet man

$$p(f) = \sum_{\mu=0}^{2n} a_\mu f^\mu, \tag{77}$$

so erhält man an Stelle von (76)

$$\tilde{g}(z) = g(z) + p(f), \; \tilde{h}(z) = h(z) - (-\varepsilon)^n f^{2n} \overline{p\left(\frac{-\varepsilon}{\overline{f}}\right)}. \tag{78}$$

Damit gilt der folgende

Satz 4.

$\mathfrak{G}$ bezeichne ein einfach zusammenhängendes Gebiet der komplexen Zahlenebene. Für die Erzeugende $f(z)$ der Funktion

$$F = \frac{[1 + \varepsilon f \bar{f}]^2}{-\varepsilon' f' \bar{f}'}, \ \varepsilon = \pm 1,$$

gelte:

(i) *$f(z)$ besitzt in $\mathfrak{G}$ nur endlich viele Polstellen von höchstens erster Ordnung,*

(ii) $[1 + \varepsilon f \bar{f}] f' \neq 0$ *in* $\mathfrak{G}$.

$M_{2n}(f, \mathfrak{G})$ bezeichne die in (39) *definierte Funktionenmenge. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

a) *Zu jeder in $\mathfrak{G}$ definierten Lösung der Differentialgleichung*

$$[1 + \varepsilon f \bar{f}]^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n (n+1) f' \overline{f'} w = 0, \ n \in \mathfrak{N}, \ \varepsilon = \pm 1, \tag{79}$$

gibt es zwei Funktionen

$$g(z), \ h(z) \in M_{2n}(f, \mathfrak{G}),$$

so dass

$$w = H_n g + \overline{H_n h} \tag{80}$$

mit

$$H_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k^n}{\omega^{n-k}} R^k, \quad \omega = \frac{1 + \varepsilon f \bar{f}}{\varepsilon \bar{f}}, \quad R = \frac{1}{f'} \frac{\partial}{\partial z}. \tag{81}$$

b) *Andererseits stellt* (80) *für jedes Paar von Funktionen*

$$g(z), \ h(z) \in M_{2n}(f, \mathfrak{G})$$

eine Lösung von (79) *in $\mathfrak{G}$ dar.*

c) *Bei vorgegebener Lösung w von* (79) *sind die Funktionen*

$$R^{2n+1} g = \frac{P^{n+1} w}{\omega^{2n+2}}, \quad R^{2n+1} h = \frac{P^{n+1} \bar{w}}{\omega^{2n+2}} \tag{82}$$

($P = \omega^2 R$) *eindeutig bestimmt. Die Erzeugenden $g(z)$ und $h(z)$ sind in diesem Fall nur bis auf ein Polynom $p(f)$ vom Grad $2n$ in f bestimmt. Das allgemeinste Erzeugendenpaar $\tilde{g}(z)$ und $\tilde{h}(z)$ folgt aus*

$$\tilde{g}(z) = g(z) + p(f), \quad \tilde{h}(z) = h(z) - (-\varepsilon)^n f^{2n} \ \overline{p\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{f}}\right)}. \tag{83}$$

d) Liegt eine Lösung vor, die sich in der Form

$$w = H_n g \text{ bzw. } w = \overline{H_n h}$$

darstellen lässt, so ist die Erzeugende eindeutig bestimmt und folgt gemäss

$$(84) \qquad g(z) = \frac{\overline{P^n \overline{w}}}{(2n)!} \quad \text{bzw.} \quad h(z) = \frac{\overline{P^n w}}{(2n)!}.$$

Die eingangs genannte Differentialgleichung (5) folgt aus (79), wenn man $f(z) = z$ verwendet. In diesem Fall gilt:

$$1 + \varepsilon z \overline{z} \neq 0, \ g(z), \ h(z) \text{ hol. in } \mathfrak{G},$$

$$(85) \qquad H_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-\varepsilon)^{n-k}(2n-k)!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{\overline{z}}{1+\varepsilon z\overline{z}}\right)^{n-k} \frac{\partial^k}{\partial z^k}.$$

Damit geht der Operator H_n in den in [1] verwendeten Operator $\widehat{E}$ über.

Unter den Lösungen der Differentialgleichungen (79) sind die reellwertigen Lösungen von besonderem Interesse. Wir gehen von der Darstellung (80) aus und verwenden

$$W = H_n g - H_n h.$$

Dann gilt für eine reellwertige Lösung w:

$$w - \overline{w} = H_n g + \overline{H_n h} - \overline{H_n g} - H_n h = (H_n g - H_n h) - (\overline{H_n g - H_n h})$$

$$= W - \overline{W} = 0.$$

Damit folgt, da W eine reellwertige Funktion bezeichnet,

$$w = H_n g + \overline{H_n h} = H_n g + \overline{H_n g} - W = \frac{1}{2}\{(2H_n g - W) + \overline{(2H_n g - W)}\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(H_n g + H_n h) + \overline{(H_n g + H_n h)}\}.$$

Berücksichtigt man noch

$$R^k g + R^k h = R^k (g + h)$$

und

$$H_n g + H_n h = H_n (g + h),$$

so erhält man für eine reellwertige Lösung w von (79) die Darstellung

$$w = H_n \left(\frac{g+h}{2}\right) + \overline{H_n \left(\frac{g+h}{2}\right)}.$$

Ist eine reellwertige Lösung vorgegeben, so ist die Erzeugende nur bis auf ein Polynom $p(f)$ vom Grad $2n$ in f bestimmt. Aus (83) folgt darüber hinaus, dass $p(f)$ der Bedingung

$$p(f) + (-\varepsilon)^n f^{2n} \overline{p\left(\frac{-\varepsilon}{\overline{f}}\right)} = 0$$

genügen muss. Zusammenfassend gilt der folgende

Satz 5.

a) Zu jeder in $\mathfrak{G}$ definierten reellwertigen Lösung der Differentialgleichung (79)

$$[1 + \varepsilon f\overline{f}]^2 w_{z\overline{z}} + \varepsilon n (n+1) f' \overline{f'} w = 0, \quad n \in \mathfrak{N}, \varepsilon = \pm 1,$$

gibt es eine Funktion

$$g(z) \in M_{2n}(f, \mathfrak{G}),$$

so dass

$$w = H_n g + \overline{H_n g} \tag{86}$$

mit H_n gemäss (81).

b) Umgekehrt stellt (86) *für jede Funktion*

$$g(z) \in M_{2n}(f, \mathfrak{G})$$

eine reellwertige Lösung von (79) *in $\mathfrak{G}$ dar.*

c) Bei vorgegebener reellwertiger Lösung w von (79) *ist die Funktion*

$$R^{2n+1} g = \frac{P^{n+1} w}{\omega^{2n+2}}$$

(mit ω und R gemäss (81) *und $P = \omega^2 R$) eindeutig bestimmt. Die Erzeugende $g(z)$ ist bei Vorgabe von w nur bis auf ein Polynom $p(f)$ vom Grad $2n$ in f bestimmt. Man erhält die allgemeinste Er-*

zeugende $\tilde{g}(z)$ *aus*

$$\tilde{g}(z) = g(z) + p(f) \tag{87}$$

mit

$$p(f) + (-\varepsilon)^n f^{2n} \overline{p\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{f}}\right)} = 0. \tag{88}$$

3. Partikuläre Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung.

Wir betrachten nun die inhomogene Differentialgleichung (1)

$$F w_{z\bar{z}} - n(n+1) w = \Phi(z, \bar{z})$$

mit

$$\Phi(z, \bar{z}) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{m} \Phi_k(z, \bar{z}), \tag{89}$$

wobei die Funktionen Φ_k Lösungen der homogenen Differentialgleichungen

$$F w_{z\bar{z}} - k(k+1) w = 0 \tag{90}$$

im betrachteten Gebiet darstellen. Diese Funktionen lassen sich nach Satz 3 gemäss

$$\Phi_k(z, \bar{z}) = H_k g_k + H_k^* \overline{h_k} \tag{91}$$

mit geeigneten Erzeugenden

$$g_k(z) \in M_{2n}(\varphi, \mathfrak{G}), \qquad h_k(z) \in M_{2n}(\psi, \mathfrak{G})$$

darstellen. Unter Berücksichtigung von (91) erhält der inhomogene Anteil damit die Form

$$\Phi(z, \bar{z}) = \sum_{s=0}^{m} \frac{\varphi_s(z) + \overline{\psi_s(z)}}{\omega^s} \tag{92}$$

mit

$$\varphi_s(z) = \sum_{\substack{k=s \\ k \neq n}}^{m} A_{k-s}^{k} R^{k-s} g_k, \tag{93}$$

$$\psi_s(z) = \sum_{\substack{k=s \\ k \neq n}}^{m} A_{k-s}^{k} \overline{S^{k-s} \overline{h_k}}. \tag{94}$$

Es sei besonders darauf hingewiesen, dass hier im Fall $m > n$ die Funktionen

(95) $$\varphi_n(z) = \sum_{k=n+1}^{m} A_{k-n}^{k} R^{k-n} g_k,$$

(96) $$\psi_n(z) = \sum_{k=n+1}^{m} A_{k-n}^{k} \overline{S^{k-n} \overline{h_k}}$$

auftreten, die durch die Erzeugenden $g_k(z)$ und $h_k(z)$, $k = n+1, \dots, m$, eindeutig festgelegt sind.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass der inhomogene Anteil der Differentialgleichung (1) die Gestalt

$$\Phi(z, \bar{z}) = \Phi_k(z, \bar{z})$$

mit

(97) $$F\Phi_{k, z\bar{z}} - k(k+1)\Phi_k = 0, \quad k \neq n,$$

hat, und setzen die partikuläre Lösung in der Form

$$w = \lambda \Phi_k(z, \bar{z}), \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

an. Durch Einsetzen in (1) folgt dann unter Berücksichtigung von (97)

$$\Phi_k(z, \bar{z}) \{ \lambda k(k+1) - \lambda n(n+1) - 1 \} = 0.$$

Wir erhalten also eine partikuläre Lösung mit

(98) $$\lambda = \frac{1}{k(k+1) - n(n+1)}.$$

Dieses Verfahren versagt offensichtlich im Fall der Resonanz, d.h. für $k = n$. Hat der inhomogene Anteil allgemein die Form (89) so erhält man eine partikuläre Lösung durch

(99) $$w = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{m} \frac{1}{k(k+1) - n(n+1)} \Phi_k(z, \bar{z}).$$

Ist generell eine inhomogene Differentialgleichung

$$F w_{z\bar{z}} - n(n+1) w = \Phi(z, \bar{z})$$

vorgelegt, so entsteht im Hinblick auf eine Anwendung der hier und in Kap. 4 gewonnenen Ergebnisse die Frage, ob sich der inhomogene Anteil $\Phi(z, \bar{z})$ in der Form

$$\Phi(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{m} \Phi_k(z, \bar{z})$$

mit

$$F \Phi_{k, z\bar{z}} - k(k+1) \Phi_k = 0$$

darstellen lässt. Damit wird man auf die Differentialgleichung

(100) $$Q^{m+1} \left\{ \frac{P^{m+1} \Phi}{\omega^{2m+2}} \right\} = 0 \text{ (}^5\text{)}$$

geführt, wobei P und Q die in (53) definierten Operatoren bezeichnen, Diese Differentialgleichung soll in einer besonderen Arbeit behandelt werden.

4. Der Sonderfall der Resonanz.

Im Fall der Resonanz hat die inhomogene Differentialgleichung (1) die Gestalt

$$F w_{z\bar{z}} - n(n+1) w = \Phi(z, \bar{z})$$

mit

$$F \Phi_{z\bar{z}} - n(n+1) \Phi = 0.$$

Berüchsichtigt man, dass der inhomogene Anteil hier in der Form

(101) $$\Phi(z, \bar{z}) = H_n g + H_n^* \bar{h}$$

mit geeigneten Funktionen

$$g(z) \in M_{2n}(\varphi, \mathfrak{G}), \qquad h(z) \in M_{2n}(\psi, \mathfrak{G})$$

darstellbar ist, so erhält man den einfachsten Fall dieser Art, wenn die Erzeugenden konstant sind. Wir betrachten deshalb zunächst die Differentialgleichung

(102) $$F w_{z\bar{z}} - n(n+1) w = \frac{C}{\omega^n}, \quad C \in \mathbb{C},$$

(5) Ein Spezialfall der Differentialgleichung (100) mit $P = (1 + \varepsilon z \bar{z})^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $Q = (1 + \varepsilon z \bar{z})^2 \frac{\partial}{\partial z}$ und $\omega = 1 + \varepsilon z \bar{z}$, $\varepsilon = \pm 1$, wurde in [2] behandelt.

oder, wenn wir $Fw_{z\bar{z}} = \omega^2 RSw$ verwenden,

$$\omega^2 RSw - n(n+1)w = \frac{C}{\omega^n}. \tag{103}$$

Wir suchen eine partikuläre nur von ω abhängende Lösung

$$w = W(\omega)$$

zu bestimmen. Dann tritt an die Stelle von (103) die inhomogene Eulersche Differentialgleichung

$$\omega^2 W'' - n(n+1)W = \frac{C}{\omega^n}. \tag{104}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet hier

$$W_h = C_1\,\omega^{n+1} + \frac{C_2}{\omega^n}, \qquad C_1, C_2 \in \mathfrak{C}.$$

Durch Variation der Konstanten erhält man als partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (104)

$$W_i = -\frac{C}{(2n+1)\,\omega^n}\log\omega. \tag{105}$$

Wir betrachten nun die Differentialgleichung (1) mit

$$\Phi(z,\bar{z}) = H_n g, \quad g(z) \text{ hol. in } \mathfrak{G}, \tag{106}$$

und nehmen an, dass die Funktionen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ (vergl. Satz 1, a) in $\mathfrak{G}$ holomorph sind. Mit Rücksicht auf das in (101) gewonnene Ergebnis verwenden wir zur Bestimmung einer partikulären Lösung den Ansatz

$$w = (\lambda\Phi + \Phi_1)\log\omega + \Phi_2 \tag{107}$$

mit

$$\Phi_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)\,\omega^k, \qquad \Phi_2 = \sum_{k=-n}^{\infty} g_k(z)\,\omega^k. \tag{108}$$

Dabei nehmen wir an, dass die genannten Reihen in $\mathfrak{G}$ gleichmässig konvergieren. Setzt man (107) in (1) ein, so erhält man

$$\log\omega\,\{\omega^2 RS - n(n+1)\}\,\Phi_1 + \{\omega^2 RS - n(n+1)\}\,\Phi_2 \tag{109}$$
$$+ \{\lambda\dot{\omega}(R+S) - (\lambda+1)\}\,\Phi + \{\omega(R+S) - 1\}\,\Phi_1 = 0.$$

Der Faktor von $\log \omega$ verschwindet, wenn Φ_1 eine Lösung der homogenen Differentialgleichung bezeichnet. Damit erhält man als erste notwendige Bedingung

$$\Phi_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k+1}(k-1)!\,(2n+1)!}{n!\,(n+k)!\,(k-n-1)!} R^{k-n-1} f_{n+1}(z)\,\omega^k, \tag{110}$$

wobei $f_{n+1}(z)$ vorerst beliebig ist. Unter Berücksichtigung von (106) gilt

$$\{\lambda\omega(R+S)-(\lambda+1)\}\,\Phi = -(1+\lambda+2n\lambda)\,\Phi + $$
$$+\lambda \sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-1)^{n+k+1}(2n-k)!}{(k-2)!\,(n-k+1)!} \frac{R^k g}{\omega^{n-k}}.$$

Mit

$$\lambda = -\frac{1}{2n+1} \tag{111}$$

folgt sodann an Stelle von (109)

$$\sum_{k=-n+1}^{\infty} \{(k-1)Rg_{k-1}-(n+k)(n+1-k)g_k\}\,\omega^k$$
$$+(2n+1)f_{n+1}\,\omega^{n+1}+\sum_{k=n+2}^{\infty}((2k-1)f_k+Rf_{k-1})\,\omega^k$$
$$+\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n+2}^{1} \frac{(-1)^k(n-k)!}{(1-k)!\,(n+k-2)!} R^{n+k} g\,\omega^k = 0, \tag{112}$$

wobei $g_{-n}(z)$ beliebig wählbar ist. Verwendet man

$$g_{-n}(z) \equiv 0,$$

so folgt zunächst

$$g_{-n+1}(z) \equiv 0,$$

und durch Koeffizientenvergleich erhält man die partikuläre Lösung

$$w = \left\{\Phi_1 - \frac{1}{2n+1}\Phi\right\}\log\omega + \Phi_2 \tag{113}$$

mit Φ_1 und Φ_2 gemäss (108) und

$$f_k(z) = \frac{k-1}{(n+k)(n+1-k)} Rf_{k-1}, \qquad k \geq n+2, \tag{114}$$

$$f_{n+1}(z) = \frac{n!}{(2n+1)^2\,(2n)!} R^{2n+1} g(z), \tag{115}$$

$$(116)\qquad g_k(z) = \frac{1}{(n+k)(n+1-k)} \Big\{ (k-1) R g_{k-1} + $$
$$+ \frac{(-1)^k (n-k)!}{(2n+1)(1-k)!\,(n+k-2)} R^{n+k} g \Big\}, \quad -n+2 \leq k \leq 1,$$

$$(117)\qquad g_k(z) = -\frac{(k-1)!\,(n-k)!}{(2n+1)(n+k)!} R^{n+k} g, \quad 1 \leq k \leq n,$$

$$(118)\qquad g_{n+1}(z) \equiv 0,$$

$$(119)\qquad g_k(z) = \frac{1}{(n+k)(n+1-k)} \{ (k-1) R g_{k-1} + (2k-1) f_k + R f_{k-1} \},$$
$$k \geq n+2.$$

Damit haben die in (113) auftretenden Reihen generell die Form

$$\Phi_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\, \omega^k R^{n+k} g, \quad a_k \in \mathbb{R},$$

$$\Phi_2 = \sum_{k=-n+2}^{\infty} b_k\, \omega^k R^{n+k} g, \ b_k \in \mathbb{R}, \ b_{n+1} = 0.$$

Diese Reihen brechen *ab*, wenn die Erzeugende $g(z)$ des inhomogenen Anteils $\Phi(z, \bar{z})$ ein Polynom in $\varphi(z)$ darstellt. Man erhält im einfachsten Fall mit

$$g(z) = C \text{ (konst.)}$$

die oben genannte partikuläre Lösung (105).

Hat der inhomogene Anteil in (1) die Form

$$(120)\qquad \Phi(z, \bar{z}) = H_n^* \bar{h}, \quad h(z) \text{ hol. in } \mathfrak{G},$$

so lässt sich mit Hilfe des Ansatzes

$$(121)\qquad w = \{ \lambda \Phi + \Phi_1^* \} \log \omega + \Phi_2^*,$$

$$\Phi_1^*(z, \bar{z}) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \overline{f_k^*(z)}\, \omega^k, \qquad \Phi_2^*(z, \bar{z}) = \sum_{k=-n}^{\infty} \overline{g_k^*(z)}\, \omega^k,$$

ein ganz entsprechendes Ergebnis wie oben erzielen. Dabei ist in den Formeln (114) bis (119) f_k bzw. g_k durch $\overline{f_k^*}$ bzw. $\overline{g_k^*}$ zu ersetzen; ausserdem ist der Differentialoperator S an Stelle von R zu verwenden.

LITERATUR

[1] BAUER, K. W. und E. PESCHL: *Ein allgemeiner Entwicklungssatz für die Lösungen der Differentialgleichung* $(1 + \varepsilon z \bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n+1) w = 0$ *in der Nähe isolierter Singularitäten.* S. Ber. Bayer. Akad. Wiss., math-naturw. Kl., 1965, 113-146 (1966).

[2] BAUER, K. W.: *Über eine Klasse homogener partieller Differentialgleichungen gerader Ordnung.* Archiv d. Math., Vol. XVIII, 430-437 (1967).

[3] BAUER, K. W.: *Über die Lösungen der inhomogenen elliptischen Differentialgleichungen* $(1 + \varepsilon z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n+1) w = \Phi(z, \bar{z})$. Monatsh. Math., 71, 18-37 (1968).

[4] BAUER, K. W.: *Über Differentialgleichungen der Form* $F(z, \bar{z}) w_{z\bar{z}} - n(n+1) w = 0$. Monatsh. Math., 75, 1-13 (1971).

[5] FLORIAN, H. und G. JANK.: *Polynomerzeugende bei einer Klasse von Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variablen.* Monatsh. Math., 75, 31-37 (1971).

[6] JANK, G.: *Operatoren bei partiellen Differentialgleichungen, I Lösungsdarstellungen.* Inst. f. Angew. Math., Univ. u. Techn. Hochsch. Graz, Vortragsauszug (1970).

[7] KRACHT, H. und E. KREYSZIG: *Bergman-Operatoren mit Polynomen als Erzeugenden.* Manuscripta math., 1, 369-376 (1969).

[8] RUSCHEWEYH, ST.: *Gewisse Klassen verallgemeinerter analytischer Funktionen.* Bonner Math. Schr. Nr. 39 (1969).

[9] RUSCHEWEYH, ST.: *Operatoren bei partiellen Differentialgleichungen, II Eigenschaften der Lösungen.* Inst. f. Angew. Math., Univ. u. Techn. Hochsch. Graz Vortragsauszug (1970).