SEMINORME DI BEPPO LEVI E MISURE POSITIVE SOPRA UNO SPAZIO LOCALMENTE COMPATTO (*)

di MARIO A. PUGLISI (a Bari) (**)

SOMMARIO. - *Viene indicato un procedimento per costruire la teoria dell'integrazione di* N. BOURBAKI *rispetto ad una misura positiva sopra uno spazio localmente compatto adoperando i metodi delle seminorme di Beppo Levi.*

SUMMARY. - *The integral theory by* BOURBAKI *on a locally compact space is constructed by means of the method of* « seminorme di Beppo Levi » *introduced by the writher elsewere.*

Introduzione.

La nozione di *seminorma di Beppo Levi* dallo scrivente introdotta ed utilizzata in altra Nota (cfr. [12]: introd. e [14]: § 1) può essere efficacemente adoperata per costruire, attraverso i metodi da essa forniti, la teoria dell'integrazione di N. BOURBAKI rispetto ad una misura positiva sopra uno spazio localmente compatto.

A ciò si perviene nella presente Nota costruendo per un'assegnata misura positiva μ su uno spazio localmente compatto una conveniente seminorma di Beppo Levi qui denominata « canonicamente associata a μ » e riconoscendo che la teoria dell'integrazione da essa dedotta con i metodi tipici sopra richiamati è identica alla teoria dell'integrazione di N. BOURBAKI col significato naturale che la parola « identica » viene ad assumere in questo contesto.

(*) Pervenuto in redazione il 30 ottobre 1970.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei Contratti di Ricerca matematica del C.N.R.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Analisi Matematica dell'Università — Via Nicolai 2 — 70121 Bari.

La seminorma di Beppo Levi associata a μ viene qui ottenuta come caso particolare di un più generale procedimento assiomatico di costruzione di seminorme di Beppo Levi.

§ 1. Costruzione di una seminorma di Beppo Levi.

1. — In quanto segue E è un insieme arbitrario. Sia $\mathcal{B}$ un insieme non vuoto di funzioni reali *positive* definite in E assoggettato alle condizioni seguenti:

$$f \in \mathcal{B}, \quad g \in \mathcal{B} \Longrightarrow f + g \in \mathcal{B}, \tag{1.1.1}$$

$$\lambda \in \mathrm{R},\ 0 \leq \lambda, \quad f \in \mathcal{B} \Longrightarrow \lambda \cdot f \in \mathcal{B}, \tag{1.1.2}$$

$$f \in \mathcal{B}, \quad g \in \mathcal{B} \Longrightarrow \inf(f, g) \in \mathcal{B}, \quad \sup(f, g) \in \mathcal{B}. \tag{1.1.3}$$

Osservazione 1. Evidentemente, risulta [1]

$$0_E \in \mathcal{B}. \tag{1.1.4}$$

Sia, ulteriormente, $\nu : \mathcal{B} \to \mathrm{R}$ una funzione reale definita in $\mathcal{B}$ assoggettata alle condizioni seguenti [2]

$$f \in \mathcal{B}, \quad g \in \mathcal{B} \Longrightarrow \nu(f + g) = \nu(f) + \nu(g), \tag{1.1.5}$$

$$\lambda \in \mathrm{R}, \quad 0 \leq \lambda, \quad f \in \mathcal{B} \Longrightarrow \nu(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \nu(f), \tag{1.1.6}$$

$$f \in \mathcal{B}, \quad g \in \mathcal{B}, \quad f \leq g \Longrightarrow \nu(f) \leq \nu(g), \tag{1.1.7}$$

$$(f_n)_{n \in \mathrm{N}} \in \mathcal{B}^{\mathrm{N}}, \quad \forall\, n \in \mathrm{N} : f_n \leq f_{n+1}, \quad f \in \mathcal{B}, \quad \sup_{n \in \mathrm{N}} f_n = f \Longrightarrow \sup_{n \in \mathrm{N}} \nu(f_n) = \nu(f). \tag{1.1.8}$$

Osservazione 2. Evidentemente, risulta che

$$\nu(0_E) = 0, \tag{1.1.9}$$

$$f \in \mathcal{B} \Longrightarrow 0 \leq \nu(f), \tag{1.1.10}$$

[1] Denotiamo con 0_E e, successivamente, con 1_E rispettivamente le funzioni reali definite in E di costante valore 0 e 1.

[2] Se E ed F sono insiemi arbitrari, denotiamo indifferentemente con $\mathcal{F}(E, F)$ o con F^E l'insieme delle applicazioni di E in F.

(1.1.11) $$f \in \mathcal{B},\ g \in \mathcal{B},\ f \leq g,\ g - f \in \mathcal{B} \Longrightarrow \nu(g-f) = \nu(g) - \nu(f),$$

(1.1.12) $$(f_n)_{n \in \mathrm{N}} \in \mathcal{B}^{\mathrm{N}}, \quad \forall n \in \mathrm{N} : f_n \leq f_{n+1}, \quad (\nu(f_n))_{n \in \mathrm{N}} \text{ è maggiorata, } f \in \mathcal{B},$$

$$f = \sup_{n \in \mathrm{N}} (\inf(f, f_n)) \Longrightarrow \nu(f) \leq \sup_{n \in \mathrm{N}} \nu(f_n).$$

2. Siano $\mathcal{B}$ e ν quelli del n. 1. Si ponga (cfr. ([2])):

(1.2.1) $$\mathcal{B}^*(\nu) = \{f \in \mathcal{F}(E, \mathrm{R}) \mid 0_E \leq f,\ \exists (f_n)_{n \in \mathrm{N}} \in \mathcal{B}^{\mathrm{N}},\ \forall n \in \mathrm{N} : f_n \leq f_{n+1},$$
$$f = \sup_{n \in \mathrm{N}} (\inf(f, f_n)), \quad (\nu(f_n))_{n \in \mathrm{N}} \text{ è maggiorata}\}.$$

Osservazione 1. Evidentemente, risulta

(1.2.2) $$\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^*(\nu).$$

Si denoti, poi, per ogni $f \in \mathcal{B}^*(\nu)$, con $\nu^*(f)$ l'estremo inferiore dell'insieme dei numeri reali ciascuno dei quali è del tipo $\sup_{n \in \mathrm{N}} \nu(f_n)$ con $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ successione monotona crescente di elementi di $\mathcal{B}$ tale che $f = \sup_{n \in \mathrm{N}} (\inf(f, f_n))$ e $(\nu(f_n))_{n \in \mathrm{N}}$ sia maggiorata.

Osservazione 2. Evidentemente, si ha che

(1.2.3) $$f \in \mathcal{B}^*(\nu) \Longrightarrow 0 \leq \nu^*(f).$$

Osservazione 3. Risulta che

(1.2.4) $$f \in \mathcal{B} \Longrightarrow \nu^*(f) = \nu(f).$$

Invero se $f \in \mathcal{B}$ ed $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ è una successione monotona crescente di elementi di $\mathcal{B}$ tale che $f = \sup_{n \in \mathrm{N}} (\inf(f, f_n))$ e $(\nu(f_n))_{n \in \mathrm{N}}$ sia maggiorata, risulta (cfr. (1.1.12)) $\nu(f) \leq \sup_{n \in \mathrm{N}} \nu(f_n)$ e, quindi, $\nu(f) \leq \nu^*(f)$. Essendo, poi, evidentemente, $\nu^*(f) \leq \nu(f)$, consegue $\nu(f) = \nu^*(f)$.

Osservazione 4. Evidentemente, risulta che

$$(1.2.5)\qquad (f_n)_{n\in\mathrm{N}} \in \mathcal{B}^{\mathrm{N}}, \quad \forall\, n \in \mathrm{N} : f_n \leq f_{n+1}, \quad (\nu(f_n))_{n\in\mathrm{N}}$$

$$\textit{è maggiorata},\ f \in \mathcal{B}^*(\nu),$$

$$f = \sup_{n\in\mathrm{N}} (\inf(f, f_n)) \Longrightarrow \nu^*(f) \leq \sup_{n\in\mathrm{N}} \nu(f_n).$$

PROP. 1. *Se f e g sono arbitrari elementi di $\mathcal{B}^*(\nu)$, risulta*

$$(1.2.6)\qquad f + g \in \mathcal{B}^*(\nu),$$

$$(1.2.7)\qquad \nu^*(f+g) \leq \nu^*(f) + \nu^*(g).$$

Dim. Siano f e g arbitrari elementi di $\mathcal{B}^*(\nu)$ e sia ε un arbitrario numero reale strettamente positivo. Esistono, allora, due successioni monotone crescenti $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ e $(g_n)_{n\in\mathrm{N}}$ di elementi di $\mathcal{B}$ tali che

$$(1.2.8)\qquad f = \sup_{n\in\mathrm{N}} (\inf(f, f_n)), \quad g = \sup_{n\in\mathrm{N}} (\inf(g, g_n)),$$

$(\nu(f_n))_{n\in\mathrm{N}}$ e $(\nu(g_n))_{n\in\mathrm{N}}$ sono maggiorate e, inoltre,

$$(1.2.9)\qquad \sup_{n\in\mathrm{N}} \nu(f_n) < \nu^*(f) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sup_{n\in\mathrm{N}} \nu(g_n) < \nu^*(g) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ora, essendo, per ogni $n \in \mathrm{N}$, $\inf(f, f_n) + \inf(g, g_n) \leq \inf(f + g, f_n + g_n)$, a causa di (1.2.8) risulta $f + g \leq \sup_{n\in\mathrm{N}} (\inf(f+g, f_n + g_n))$ e, quindi,

$$(1.2.10)\qquad f + g = \sup_{n\in\mathrm{N}} (\inf(f + g, f_n + g_n))$$

dove (cfr. (1.1.1)) la $(f_n + g_n)_{n\in\mathrm{N}}$ è ancora una successione monotona crescente di elementi di $\mathcal{B}$. Essendo, ulteriormente, per ogni $n \in \mathrm{N}$, $\nu(f_n + g_n) = \nu(f_n) + \nu(g_n)$ (cfr. (1.1.5)), la successione numerica $(\nu(f_n + g_n))_{n\in\mathrm{N}}$ risulta maggiorata. Pertanto, a causa di (1.2.10), risulta $f + g \in \mathcal{B}^*(\nu)$ e, inoltre, per (1.2.5) e (1.2.9), $\nu^*(f+g) < \nu^*(f) + \nu^*(g) + \varepsilon$. Da qui, a causa dell'arbitrarietà di ε, consegue anche la (1.2.7).

PROP. 2. *Se f è un arbitrario elemento di $\mathcal{B}^*(\nu)$ e λ è un numero reale positivo, risulta*

$$\lambda \cdot f \in \mathcal{B}^*(\nu), \tag{1.2.11}$$

$$\nu^*(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \nu^*(f). \tag{1.2.12}$$

Dim. Sia $f \in \mathcal{B}^*(\nu)$ e sia $\lambda \in \mathrm{R}$, $0 \leq \lambda$. L'asserto è ovvio se $\lambda = 0$. Sia $0 < \lambda$ e sia ε un arbitrario numero reale strettamente positivo. Esiste, allora, una successione monotona crescente $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ di elementi di $\mathcal{B}$ tale che

$$f = \sup_{n \in \mathrm{N}} (\inf(f, f_n)), \tag{1.2.13}$$

$(\nu(f_n))_{n \in \mathrm{N}}$ è maggiorata e, inoltre,

$$\sup_{n \in \mathrm{N}} \nu(f) < \nu^*(f) + \frac{\varepsilon}{\lambda}. \tag{1.2.14}$$

Da (1.2.13) consegue

$$\lambda \cdot f = \sup_{n \in \mathrm{N}} (\inf(\lambda \cdot f, \lambda \cdot f_n)) \tag{1.2.15}$$

dove (cfr. (1.1.2) $(\lambda \cdot f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ è ancora una successione monotona crescente di elementi di $\mathcal{B}$. Essendo, ulteriormente, per ogni $n \in \mathrm{N}$, $\nu(\lambda \cdot f_n) = \lambda \cdot \nu(f_n)$ (cfr. (1.1.6)), la successione numerica $(\nu(\lambda \cdot f_n))_{n \in \mathrm{N}}$ risulta maggiorata. Pertanto, a causa di (1.2.15), si ha $\lambda \cdot f \in \mathcal{B}^*(\nu)$ e, inoltre, per (1.2.5) e (1.2.14), $\nu^*(\lambda \cdot f) \leq \lambda \cdot \nu^*(f) + \varepsilon$. Da qui, a causa dell'arbitrarietà di ε, consegue $\nu^*(\lambda \cdot f) \leq \lambda \cdot \nu^*(f)$. Ma, allora, essendo anche $\lambda \cdot \nu^*(f) \leq \nu^*(\lambda \cdot f)$, risulta $\nu^*(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \nu^*(f)$.

PROP. 3. *Sia f un'arbitraria funzione reale positiva definita in E e sia $g \in \mathcal{B}^*(\nu)$. Allora, se è $f \leq g$, risulta anche $f \in \mathcal{B}^*(\nu)$ e $\nu^*(f) \leq \leq \nu^*(g)$.*

Dim. Siano f e g quelle previste nell'asserto e sia ε un arbitrario numero reale strettameute positivo. Esiste, allora, una successione monotona crescente $(g_n)_{n \in \mathrm{N}}$ di elementi di $\mathcal{B}$ tale che $g = \sup_{n \in \mathrm{N}} (\inf(g, g_n))$, $(\nu(g_n))_{n \in \mathrm{N}}$ è maggiorata e, inoltre,

$$\sup_{n \in \mathrm{N}} \nu(g_n) < \nu^*(g) + \varepsilon. \tag{1.2.16}$$

Ora, essendo $f \leq g$, risulta anche $f = \sup_{n \in \mathrm{N}} (\inf(f, g_n))$ e, quindi, $f \in \mathcal{B}^*(\nu)$. Inoltre, per (1.2.5) e (1.2.16) si ha $\nu^*(f) < \nu^*(g) + \varepsilon$. Da qui, a causa dell'arbitrarietà di ε, consegue $\nu^*(f) \leq \nu^*(g)$.

LEM. 1. *Sia* $((g_{n,p})_{p \in \mathrm{N}})_{n \in \mathrm{N}}$ *una successione di successioni monotone crescenti di elementi di* $\mathcal{B}$ *tale che per ogni* $(n, p) \in \mathrm{N} \times \mathrm{N}$ *si abbia* $g_{n,p} = \sup_{p \in \mathrm{N}} (\inf(g_{n,p}, g_{n+1,p}))$ *e per ogni* $n \in \mathrm{N}$ *la successione numerica* $(\nu(g_{n,p}))_{p \in \mathrm{N}}$ *sia maggiorata, Allora esiste una successione monotona crescente* $(g_q)_{q \in \mathrm{N}}$ *di elementi di* $\mathcal{B}$ *verificante le seguenti due condizioni:*

1^0) *per ogni funzione reale* φ *definita in* E *risulta*

$$\sup_{n \in \mathrm{N}} (\sup_{p \in \mathrm{N}} (\inf(\varphi, g_{n,p}))) = \sup_{q \in \mathrm{N}} (\inf(\varphi, g_q)), \tag{1.2.17}$$

2^0) $(\nu(g_q))_{q \in \mathrm{N}}$ *è maggiorata se e solo se* $(\sup_{p \in \mathrm{N}} \nu(g_{n,p}))_{n \in \mathrm{N}}$ *è maggiorata ed in questo caso, si ha*

$$\sup_{n \in \mathrm{N}} (\sup_{p \in \mathrm{N}} \nu(g_{n,p})) = \sup_{q \in \mathrm{N}} \nu(g_q). \tag{1.2.18}$$

Dim. Si ponga, per ogni $q \in \mathrm{N}$,

$$g_q = \sup_{0 \leq k \leq q} g_{k,q}.$$

A causa di (1.1.3) la $(g_q)_{q \in \mathrm{N}}$ risulta una successione monotona crescente di elementi di $\mathcal{B}$ ed inoltre si ha

$$n \in N, p \in \mathrm{N}, n \leq p \Longrightarrow g_{n,p} \leq g_p. \tag{1.2.19}$$

Sia φ un'arbitraria funzione reale definita in E. Poichè, se n e p sono come in (1.2.19), risulta $\inf(\varphi, g_{n,p}) \leq \sup_{q \in \mathrm{N}} (\inf(\varphi, g_q))$, si ha $\inf(\varphi, g_{n,p}) \leq \sup_{q \in \mathrm{N}} (\inf(\varphi, g_q))$ quali che siano n e p e, quindi,

$$\sup_{n \in \mathrm{N}} (\sup_{p \in \mathrm{N}} (\inf(\varphi, g_{n,p}))) \leq \sup_{q \in \mathrm{N}} (\inf(\varphi, g_q)). \tag{1.2.20}$$

D'altra parte, per ogni $n \in \mathrm{N}$ e per ogni $p \in \mathrm{N}$ risulta $\inf(\varphi, g_{n,p}) \leq \sup_{p \in \mathrm{N}} (\inf(\varphi, g_{n+1,p}))$ e, quindi, per ogni $n \in \mathrm{N}$ si ha $\sup_{p \in \mathrm{N}} (\inf(\varphi, g_{n,p})) \leq$

$\leq \sup_{p \in N} (\inf (\varphi, g_{n+1,\, p}))$. Pertanto, per ogni $q \in N$ risulta

$$\inf (\varphi, g_q) = \sup_{0 \leq k \leq q} (\inf (\varphi, g_{k,\, q})) \leq$$
$$\leq \sup_{0 \leq k \leq q} (\sup_{p \in N} (\inf (\varphi, g_{k,\, p}))) = \sup_{p \in N} (\inf (\varphi, g_{q,\, p})),$$

donde

$$\forall\, q \in N : \inf (\varphi, g_q) \leq \sup_{p \in N} (\inf (\varphi, g_{q,\, p})) \tag{1.2.21}$$

e anche.

$$\sup_{q \in N} (\inf (\varphi, g_q)) \leq \sup_{q \in N} (\sup_{p \in N} (\inf (\varphi, g_{q,\, p}))).$$

Questa, assieme alla (1.2.20), prova la (1.2.17).
Sia, ora, la $(\nu (g_q))_{q \in N}$ maggiorata. Se n e p sono come in (1.2.19), risulta $\nu (g_{n,\, p}) \leq \nu (g_q)$ (cfr. (1.1.7)) e, quindi, $\nu (g_{n,\, p}) \leq \sup_{q \in N} \nu (g_q)$. Pertanto la successione numerica $(\sup_{p \in N} \nu (g_{n,\, p}))_{n \in N}$ risulta maggiorata e, inoltre,

$$\sup_{n \in N} (\sup_{p \in N} \nu (g_{n,\, p})) \leq \sup_{q \in N} \nu (g_q). \tag{1.2.22}$$

Reciprocamente sia, ora, maggiorata la $(\sup_{p \in N} \nu (g_{n,\, p}))_{n \in N}$ e siano $q \in N$ e $n \in N$ tali che $q \leq n$. Risulta $g_q = \inf (g_q , g_n)$ e, quindi, a causa di (1.2.21) applicata a g_q, $g_q \leq \sup_{p \in N} (\inf (g_q , g_{n,\, p}))$ e anche $g_q = \sup_{p \in N} (\inf (g_q , g_{n,\, p}))$ donde, tenuto conto di (1.1.7) e (1.1.8),

$$\nu (g_q) = \sup_{p \in N} \nu (\inf (g_q , g_{n,\, p})) \leq \sup_{p \in N} \nu (g_{n,\, p}).$$

Ma, allora, per ogni $q \in N$ risulta $\nu (g_q) \leq \sup_{n \in N} (\sup_{p \in N} \nu (g_{n,\, p}))$ risultando, con ciò, la $(\nu (g_q))_{q \in N}$ maggiorata e, inoltre,

$$\sup_{q \in N} \nu (g_q) \leq \sup_{n \in N} (\sup_{p \in N} \nu (g_{n,\, p})).$$

Questa, assieme alla (1.2.22) prova la (1.2.18).

LEM. 2. *Sia* $(f_n)_{n \in N}$ *una successione monotona crescente di elementi di* $\mathcal{B}^* (\nu)$ *e sia* ε *un arbitrario numero reale strettamente po-*

sitivo. Allora, esiste una successione di successioni monotone crescenti di elementi di $\mathcal{B}$ $((g_{n,p})_{p \in \mathrm{N}})_{n \in \mathrm{N}}$ *verificante le condizioni seguenti :*

1⁰) $\forall n \in \mathrm{N} : f_n = \sup_{p \in \mathrm{N}} (\inf (f_n , g_{n,p}))$,

2⁰) $\forall (n,p) \in \mathrm{N} \times \mathrm{N} : g_{n,p} = \sup_{p \in \mathrm{N}} (\inf (g_{n,p} , g_{n+1,p}))$,

3⁰) $\forall n \in \mathrm{N} : (\nu (g_{n,p}))_{p \in \mathrm{N}}$ *è maggiorata e, inoltre,*

$$\sup_{p \in \mathrm{N}} \nu (g_{n,p}) < \nu^* (f_n) + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right). \tag{1.2.23}$$

Dim. Sia ε un numero reale strettamente positivo. Esiste, allora, per ogni $n \in \mathrm{N}$ una successione monotona crescente $(h_{n,p})_{p \in \mathrm{N}}$ di elementi di $\mathcal{B}$ tale che $f_n = \sup_{p \in \mathrm{N}} (\inf (f_n , h_{n,p}))$, $(\nu (h_{n,p}))_{p \in \mathrm{N}}$ è maggiorata e, inoltre,

$$\sup_{p \in \mathrm{N}} \nu (h_{n,p}) < \nu^* (f_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} . \tag{1.2.24}$$

Si ponga, per ogni $n \in \mathrm{N}$ e per ogni $p \in \mathrm{N}$

$$g_{n,p} = \sup_{0 \leq k \leq n} h_{k,p} . \tag{1.2.25}$$

Per ogni $n \in \mathrm{N}$ la $(g_{n,p})_{p \in \mathrm{N}}$ risulta evidentemente (cfr. (1.1.3)) una successione monotona crescente di elementi di $\mathcal{B}$ e anche, essendo, per ogni $p \in \mathrm{N}, h_{n,p} \leq g_{n,p}$, si ha $f_n = \sup_{p \in \mathrm{N}} (\inf (f_n , g_{n,p}))$ restando, con ciò, provata la 1⁰).

Sia, ora, $n \in \mathrm{N}$ e sia $p \in \mathrm{N}$ arbitrario. Per $q \in \mathrm{N}$ tale che $p \leq q$ risulta che

$$g_{n,p} \leq g_{n,q} = \sup_{0 \leq k \leq n} h_{k,q} \leq \sup_{0 \leq k \leq n+1} h_{k,q} = g_{n+1,q}$$

e, quindi, $g_{n,p} = \inf (g_{n,p} , g_{n+1,q})$ donde

$$g_{n,p} \leq \sup_{p \in \mathrm{N}} (\inf (g_{n,p} , g_{n+1,p})$$

quale che sia $p \in \mathrm{N}$. Resta, con ciò, provata la 2⁰).

Passiamo a riconoscere la 3°). Si procede per induzione completa su n. Tenuto conto di (1.2.24) e (1.2.25), la 3°) è ovvia per $n = 0$. Sia la stessa vera per un certo $n \in \mathrm{N}$ e proviamo che essa è vera per $n + 1$. È, intanto, per ogni $p \in \mathrm{N}$,

$$g_{n+1,p} = g_{n,p} + h_{n+1,p} - \inf(g_{n,p}, h_{n+1,p})$$

e, quindi, tenuto conto di (1.1.3), (1.1.5) e (1.1.11),

$$\nu(g_{n+1,p}) = \nu(g_{n,p}) + \nu(h_{n+1,p}) - \nu(\inf(g_{n,p}, h_{n+1,p})).$$

Da qui, per l'ipotesi di induzione, consegue che la $(\nu(g_{n+1,p}))_{p \in \mathrm{N}}$ è maggiorata e, inoltre,

$$\sup_{p \in \mathrm{N}} \nu(g_{n+1,p}) < \nu^*(f_n) + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \tag{1.2.26}$$

$$+ \nu^*(f_{n+1}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} - \sup_{p \in \mathrm{N}} \nu(\inf(g_{n,p}, h_{n+1,p})).$$

Ora, essendo $f_n \leq f_{n+1}$ e $f_{n+1} = \sup\limits_{p \in \mathrm{N}} (\inf(f_{n+1}, h_{n+1,p}))$, risulta anche $f_n = \sup\limits_{p \in \mathrm{N}} (\inf(f_n, h_{n+1,p}))$ e anche, essendo $f_n = \sup\limits_{p \in \mathrm{N}} (\inf(f_n, g_{n,p}))$, si ha

$$f_n = \sup_{p \in \mathrm{N}} (\inf(f_n, \inf(g_{n,p}, h_{n+1,p})))$$

donde (cfr. (1.2.5))

$$\nu^*(f_n) \leq \sup_{p \in \mathrm{N}} \nu(\inf(g_{n,p}, h_{n+1,p}))$$

e questa, assieme alla (1.2.26) comporta che

$$\sup_{p \in \mathrm{N}} \nu^*(g_{n+1,p}) < \nu^*(f_{n+1}) + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right)$$

restando, con ciò, la 3°) provata per $n + 1$.

PROP. 4 *Se $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ è una successione monotona crescente di elementi di $\mathcal{B}^*(\nu)$ maggiorata in $\mathcal{F}(E, \mathrm{R})$* [3], *posto $f = \sup\limits_{n \in \mathrm{N}} f_n$, le se-*

[3] Cfr. [2]

guenti due proprietà sono equivalenti:

a) $f \in \mathcal{B}^*(\nu)$,

b) $(\nu^*(f_n))_{n \in N}$ *è maggiorata.*

Inoltre, vera a) o, equivalentemente, b), risulta

$$\nu^*(f) = \sup_{n \in N} \nu^*(f_n). \tag{1.2.27}$$

Dim. $a) \Longrightarrow b)$. Invero essendo, per ogni $n \in N, f_n \leq f$, risulta $\nu^*(f_n) \leq \nu^*(f)$ e, conseguentemente,

$$\sup_{n \in N} \nu^*(f_n) \leq \nu^*(f). \tag{1.2.28}$$

$b) \Longrightarrow a)$. Sia ε un arbitrario numero reale strettamente positivo e sia $((g_{n,p})_{p \in N})_{n \in N}$ la successione di successioni monotone crescenti di elementi di $\mathcal{B}$ prevista nel lem. 2 verificante 1^0), 2^0) e 3^0) del medesimo lem. 2. Sia, ulteriormente $(g_q)_{q \in N}$ la successione monotona crescente di elementi di $\mathcal{B}$ prevista nel lem. 1 verificante 1^0) e 2^0) del medesimo lem. 1. A causa di 1^0) del lem. 2 risulta

$$f = \sup_{n \in N} f_n = \sup_{n \in N} (\sup_{p \in N} (\inf(f_n, g_{n,p}))) \leq$$

$$\leq \sup_{n \in N} (\sup_{p \in N} (\inf(f, g_{n,p}))) = \sup_{q \in N} (\inf(f, g_q)).$$

Ulteriormente, essendo maggiorata a causa di *b)* e di 3^0) del lem. 2 la successione $(\sup_{p \in N} \nu(g_{n,p}))_{n \in N}$, a causa di 2^0) del lem. 1 è maggiorata la successione $(\nu(g_q))_{q \in N}$ e, quindi, $f \in \mathcal{B}^*(\nu)$ e, inoltre, per 3^0) del lem. 2 e per 2^0) del lem. 1, si ha

$$\nu^*(f) \leq \sup_{q \in N} \nu(g_q) = \sup_{n \in N} (\sup_{p \in N} \nu(g_{n,p})) \leq \sup_{n \in N} \nu^*(f_n) + \varepsilon$$

donde, a causa dell'arbitrarietà di ε, $\nu^*(f) \leq \sup_{n \in N} \nu^*(f_n)$ e questa, assieme alla (1.2.28) prova la (1.2.27).

Da tutto quanto precede consegue, allora, che

COROLL. 1. *Se* $\mathcal{B}$ *e* ν *sono quelli del n.* 1, $\mathcal{B}^*(\nu)$ *è un cono convesso ereditario di funzioni reali positive definite in* E *e* ν^* *è una seminorma di Beppo Levi su* $\mathcal{B}^*(\nu)$ (cfr. [12].

3. Siano $\mathcal{B}$ e ν quelli del n. 1. Denotiamo, brevemente, con $\mathcal{M}_+(\mathcal{B}, \nu)$ l'insieme delle funzioni reali positive definite in E misurabili rispetto a ν^* nel senso della def. 1 del § 1 di [12]. In altri termini, per definizione, si ha che

$$\begin{aligned}(1.3.1)\qquad \mathcal{M}_+(\mathcal{B}, \nu) = \{ f \in \mathcal{F}(E, \mathrm{R}) \mid 0_E \leq f, \varphi \in \mathcal{B}^*(\nu) \Longrightarrow \nu^*(\varphi) = \\ = \nu^*(\inf(\varphi, f)) + \nu^*(\varphi - \inf(\varphi, f))\}.\end{aligned}$$

Nel caso in esame si ha che

LEM. 3. *Per un'arbitraria funzione reale positiva* f *definita in* E *le seguenti due proprietà sono equivalenti:*

a) $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{B}, \nu)$,

b) $\varphi \in \mathcal{B} \Longrightarrow \nu(\varphi) = \nu^*(\inf(\varphi, f)) + \nu^*(\varphi - \inf(\varphi, f))$.

Dim. *a*) $\Longrightarrow$ *b*). È ovvia.

b) $\Longrightarrow$ *a*). Sia $\varphi \in \mathcal{B}^*(\nu)$ e sia ε un arbitrario numero reale strettamente positivo. Esiste, allora, una successione monotona crescente $(\varphi_n)_{n \in \mathrm{N}}$ di elementi di $\mathcal{B}$ tale che $\varphi = \sup\limits_{n \in \mathrm{N}} (\inf(\varphi, \varphi_n))$ e

$$(1.3.2)\qquad \sup_{n \in \mathrm{N}} \nu(\varphi_n) < \nu^*(\varphi) + \varepsilon.$$

È, allora, $\inf(\varphi, f) = \lim\limits_{n \to \infty} (\inf(\varphi, (\inf(\varphi_n, f)))$ e $\varphi - \inf(\varphi, f) \leq$ $\leq \lim\limits_{n \to \infty} (\inf(\varphi, \varphi_n - \inf(\varphi_n, f)))$ donde (cfr. (1.2.5))

$$\nu^*(\inf(\varphi, f)) \leq \lim_{n \to \infty} \nu^*(\inf(\varphi_n, f))$$

e

$$\nu^*(\varphi - \inf(\varphi, f)) \leq \lim_{n \to \infty} \nu^*(\varphi_n - \inf(\varphi_n, f))$$

da cui, essendo per ogni $n \in \mathrm{N}$, a causa di *b*) $\nu(\varphi_n) = \nu^*(\inf(\varphi_n, f)) + + \nu^*(\varphi_n - \inf(\varphi_n, f))$ e tenuto conto di (1.3.2), consegue

$$\nu^*(\inf(\varphi, f)) + \nu^*(\varphi - \inf(\varphi, f)) < \nu^*(\varphi) + \varepsilon$$

donde, tenuto conto dell'arbitrarietà di ε, $\nu^*(\inf(\varphi, f)) + \nu^*(\varphi - \inf(\varphi, f)) = \nu^*(\varphi)$ e, quindi, $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{B}, \nu)$.

4. Siano ancora $\mathcal{B}$ e ν quelli del n. 1. Denotiamo brevemente con $\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu)$ l'insieme delle funzioni *integrabili* rispetto a ν^* nel senso della def. 3. del § 1 di [12]. In altri termini, per definizione, si ha che

$$(1.4.1) \qquad \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu) = \{ f \in \mathcal{F}(E, \mathrm{R}) \mid |f| \in \mathcal{B}^*(\nu), f \in \mathcal{M}(\mathcal{B}, \nu)\},$$

dove $\mathcal{M}(\mathcal{B}, \nu)$ denota l'insieme delle funzioni *misurabili* rispetto a ν^* cioè (cfr. [12]: § 1, def.2)

$$(1.4.2) \qquad \mathcal{M}(\mathcal{B}, \nu) = \{ f \in \mathcal{F}(E, \mathrm{R}) \mid f^+ \in \mathcal{M}_+(\mathcal{B}, \nu), f^- \in \mathcal{M}_+(\mathcal{B}, \nu)\}.$$

Come è noto (cfr. [12]: § 1, prop. 5) $\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu)$ è uno *spazio di Riesz* di funzioni reali definite in E mentre la funzione reale $\nu^{(1)}$ definita nel modo seguente

$$(1.4.3) \qquad \forall f \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu) : \nu^{(1)}(f) = \nu^*(f^+) - \nu^*(f^-),$$

è un *integrale di Daniell* su $\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu)$ e, per esso, sono verificati il teorema della convergenza monotona, il teorema della convergenza maggiorata, ecc. (cfr. [12]: § 1).

Osservazione 1. Evidentemente, risulta che

$$(1.4.4) \qquad f \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu),\ 0_E \leq f \Longrightarrow \nu^{(1)}(f) = \nu^*(f).$$

Denotiamo ulteriormente con $\mathcal{L}^{(0)}(\mathcal{B}, \nu)$ l'insieme delle funzioni ν^*-nulle nel senso della def. 1 del § 2 di [13], cioè

$$(1.4.5) \qquad \mathcal{L}^{(0)}(\mathcal{B}, \nu) = \{ f \in \mathcal{F}(E, \mathrm{R}) \mid |f| \in \mathcal{B}^*(\nu), \nu^*(|f|) = 0\}.$$

Siffatto $\mathcal{L}^{(0)}(\mathcal{B}, \nu)$ è uno *spazio di Riesz* chiuso rispetto al passaggio al limite delle successioni convergenti (cfr. [13]: § 2, prop. 1, coroll. 2) mentre, posto [4]

$$(1.4.6) \qquad \mathfrak{A}^{(0)}(\mathcal{B}, \nu) = \{ D \in \mathfrak{P}(E) \mid \varphi_D \in \mathcal{L}^{(0)}(\mathcal{B}, \nu)\},$$

$\mathfrak{A}^{(0)}(\mathcal{B}, \nu)$ è un *σ-anello* di parti di E (cfr. [13]: § 2, N. 2 osserv. 1).

[4] Se X è un'arbitraria parte di E, denotiamo con φ_X la *funzione caratteristica* di X.

Il teor. 2 del § 3 di [13] permette di asserire che

(1.4.7) *Se* $(f_n)_{n \in N}$ *è una successione monotona crescente di elementi di* $\mathcal{B}^*(\nu)$, *le seguenti due proprietà sono equivalenti*:

a) $\exists\, D \in \mathfrak{U}^{(0)}(\mathcal{B}, \nu), \exists\, f \in \mathcal{B}^*(\nu) \ni' \sup_{n \in N} (\varphi_{C(D)} \cdot f_n) = f$,

b) $(\nu^*(f_n))_{n \in N}$ *è maggiorata.*

Inoltre vera a) o, equivalentemente, b), risulta

$$\nu^*(f) = \sup_{n \in N} \nu^*(f_n).$$

Da ultimo, posto

$$\mathcal{B}^{(1)}(\nu) = \{ f \in \mathcal{I}(E, R) \mid |f| \in \mathcal{B}^*(\nu) \}, \tag{1.4.8}$$

e denotata con $N_1^{(\nu)}$ la funzione reale definita in $\mathcal{B}^{(1)}(\nu)$ nel modo seguente

$$\forall f \in \mathcal{B}^{(1)}(\nu) : N_1^{(\nu)}(f) = \nu^*(|f|), \tag{1.4.9}$$

$\mathcal{B}^{(1)}(\nu)$ è uno spazio di Riesz di funzioni reali definite in E e $N_1^{(\nu)}$ risulta una effettiva *seminorma* su $\mathcal{B}^{(1)}(\nu)$ rispetto alla quale $\mathcal{B}^{(1)}(\nu)$ è uno *spazio di Riesz seminormato completo* (cfr. [13]: § 3, prop. 1, propr. 4 e teor.. 3).

Osservazione 2. Evidentemente, risulta

$$\mathcal{B}^*(\nu) \subset \mathcal{B}^{(1)}, (\nu), \qquad \forall f \in \mathcal{B}^*(\nu) : N_1^{(\nu)}(f) = \nu^*(f). \tag{1.4.10}$$

Osservazione 3. Si ha (cfr. (1.4.11))

$$\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu) = \mathcal{M}(\mathcal{B}, \nu) \cap \mathcal{B}^{(1)}(\nu) \tag{1.4.11}$$

e $\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu)$ risulta chiuso in $\mathcal{B}^{(1)}(\nu)$ per la topologia dedotta dalla seminorma $N_1^{(\nu)}$ (cfr. [13]: § 4, teor. 5) (5) e, quindi, a sua volta completo come sottospazio di $\mathcal{B}^{(1)}(\nu)$.

Quanto sopra permette di riconoscere il seguente criterio di integrabilità:

(5) Si tenga presente che nel caso $p = 1$ le ipotesi (4.1.1) e (4.1.2) di [13] sono superflue.

PROP. 5. *Per un'arbitraria funzione reale f definita in E le seguenti due proprietà sono equivalenti:*

a) $f \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu)$,

b) $\forall \varepsilon \in \mathrm{R}_+^* \, \exists g \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu) \, \exists h \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu) \ni' g \leq f \leq h, \nu^{(1)}(h-g) < \varepsilon$.

Dim. $a) \Longrightarrow b)$. E' ovvia.

$b) \Longrightarrow a)$. Sia ε un arbitrario numero reale strettamente positivo e siano g e h quelle previste in b). E', intanto, essendo $|f| \leq \leq \sup(h, -g)$ con $0_E \leq \sup(h, -g) \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu)$ e, quindi, $\sup(h - - g) \in \mathcal{B}^*(\nu)$, $|f| \in \mathcal{B}^*(\nu)$ cioè $f \in \mathcal{B}^{(1)}(\nu)$. Si ha, poi (cfr. (1.4.4), (1.4.9) e (1.4.10))

$$N_1^{(\nu)}(f-g) = \nu^*(|f-g|) = \nu^*(f-g) \leq \nu^*(h-g) = \nu^{(1)}(h-g) < \varepsilon.$$

Da qui, a causa dell'arbitrarietà di ε, consegue che f è aderente a $\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu)$ in $\mathcal{B}^{(1)}(\nu)$ per la topologia dedotta dalla seminorma $N_1^{(\nu)}$ e, quindi (osserv. 3), $f \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu)$.

5. Tutto ciò premesso e richiamato, si supponga ora che sia verificata la seguente condizione

$$(*) \qquad f \in \mathcal{B} \Longrightarrow f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{B}, \nu).$$

Osservazione 1. Tenuto conto di (1.2.2), (1.2.4), (1.4.1) e (1.4.4), la condizione (*) ha come immediata conseguenza che

$$(1.5.1) \qquad \mathcal{B} \subset \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu), \qquad \forall f \in \mathcal{B} : \nu^{(1)}(f) = \nu(f).$$

Passiamo a riconoscere la seguente

PROP. 6. *Risulta che*

$$(1.5.2) \quad \varphi \in \mathcal{B}^*(\nu) \Longrightarrow \exists \psi \in \mathcal{B}^*(\nu) \cap \mathcal{M}_+(\mathcal{B}, \nu) \ni' \varphi \leq \psi, \nu^*(\varphi) = \nu^*(\psi).$$

Dim. Sia $\varphi \in \mathcal{B}^*(\nu)$ e sia ε un arbitrario numero reale strettamente positivo. Esiste, allora, una successione monotona crescente $(\varphi_n)_{n \in \mathrm{N}}$ di elementi di $\mathcal{B}$ tale che

$$(1.5.3) \qquad \varphi = \sup_{n \in \mathrm{N}} (\inf(\varphi, \varphi_n)) \quad \text{e} \quad \sup_{n \in \mathrm{N}} \nu(\varphi_n) < \nu^*(\varphi) + \varepsilon.$$

Ora, essendo, per ogni $n \in \mathrm{N}$, $\varphi_n \in \mathcal{B}^*(\nu)$ e $\nu^*(\varphi_n) = \nu(\varphi_n)$, la successione numerica $(\nu^*(\varphi_n))_{n \in \mathrm{N}}$ risulta maggiorata. Quindi, a causa del risultato indicato in (1.4.7), esiste $h \in \mathcal{B}^*(\nu)$ ed esiste $D \in \mathfrak{U}^{(0)}(\mathcal{B}, \nu)$ tale che (cfr. (1.5.3))

$$\text{(1.5.4)} \qquad \sup_{n \in \mathrm{N}} (\varphi_{\complement(D)} \cdot \varphi_n) = h \quad \text{e} \quad \nu^*(h) < \nu^*(\varphi) + \varepsilon.$$

D'altra parte, in forza di $(*)$, per ogni $n \in \mathrm{N}$ è anche $\varphi_n \in \mathcal{M}_+(\mathcal{B}, \nu)$ e, quindi (cfr. [13] : § 2, lem. 4), $\varphi_{\complement(D)} \cdot \varphi_n \in \mathcal{M}_+(\mathcal{B}, \nu)$ donde (cfr. [12]: § 1, prop. 3) $h \in \mathcal{M}_+(\mathcal{B}, \nu)$. Essendo, poi, per la prima di (1.5.3), $\varphi_{\complement(D)} \cdot \varphi \leq \sup_{n \in \mathrm{N}} (\varphi_{\complement(D)} \cdot \varphi_n)$, dalla prima di (1.5.4) consegue $\varphi_{\complement(D)} \cdot \varphi \leq h$. Pertanto, posto $k = \varphi_D \cdot \varphi + h$, risulta $k \in \mathcal{B}^*(\nu) \cap \mathcal{M}_+(\mathcal{B}, \nu)$, $\varphi \leq k$ e $\nu^*(\varphi) < \nu^*(k) + \varepsilon$ (cfr. [13]: § 2, prop. 3).

Da quanto precede, tenuto conto dell'arbitrarietà di ε, consegue che esiste una successione $(k_n)_{n \in \mathrm{N}}$ (che si può supporre monotona decrescente) di elementi di $\mathcal{B}^*(\nu) \cap \mathcal{M}_+(\mathcal{B}, \nu)$ tale che per ogni $n \in \mathrm{N}$ risulti

$$\varphi \leq k_n \quad \text{e} \quad \nu^*(k_n) < \nu^*(\varphi) + \frac{1}{n+1}.$$

Ma, allora, posto $\psi = \inf_{n \in \mathrm{N}} k_n$, risulta (cfr. [12] : § 1, coroll. 1)

$$\psi \in \mathcal{B}^*(\nu) \cap \mathcal{M}_+(\mathcal{B}, \nu),\ \varphi \leq \psi \ \text{e}\ \nu^*(\psi) = \nu^{(1)}(\psi) = \inf_{n \in \mathrm{N}} \nu^{(1)}(k_n) =$$

$$= \inf_{n \in \mathrm{N}} \nu^*(k_n) \leq \nu^*(\varphi)$$

donde, essendo anche $\nu^*(\varphi) \leq \nu^*(\psi)$, consegue $\nu^*(\varphi) = \nu^*(\psi)$.

COROLL. 1. *Denotato con* $\mathcal{S}(\mathcal{B}, \nu)$ *lo spazio di Riesz delle funzioni misurabili secondo Stone rispetto ad* $\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu)$ (cfr. [10] : § 3, def. 1), *risulta*

$$\text{(1.5.5)} \qquad \mathcal{M}(\mathcal{B}, \nu) = \mathcal{S}(\mathcal{B}, \nu).$$

Dim. Essendo verificata la condizione (1.5.2), consegue dal coroll. 1 del § 3 di [14].

Osservazione 2. Conseguentemente (cfr. [10] : § 3, coroll. 2) $\mathcal{M}(\mathcal{B}, \nu)$ è uno spazio di Riesz di funzioni reali definite in E chiuso rispetto al passaggio al limite delle successioni convergenti.

Dopo ciò, posto

$$(1.5.6) \qquad \mathfrak{A}_{\mathcal{B},\nu} = \{X \in \mathfrak{P}(E) \mid \varphi_X \in \mathcal{B}^*(\nu)\}$$

e denotata con μ_ν^* la *misura esterna canonicamente associata a* ν^* (cfr. [14]: § 3, def. 1), si denoti con $\mathfrak{A}^*(\mathcal{B}, \nu)$ la *σ-algebra* delle parti di E misurabili rispetto a μ_ν^*, cioè (cfr. [14]: § 3, def. 2)

$$(1.5.7) \qquad \mathfrak{A}^*(\mathcal{B}, \nu) =$$

$$= \{X \in \mathfrak{P}(E) \mid \forall A \in \mathfrak{A}_{\mathcal{B},\nu} : \mu_\nu^*(A) = \mu_\nu^*(A \cap X) + \mu_\nu^*(A - X)\}.$$

Sia, ulteriormente, $\mathfrak{M}(\mathcal{B}, \nu)$ il *σ-anello* delle parti di E misurabili rispetto a ν^*, cioè (cfr. [14]: § 3, def. 2)

$$(1.5.8) \qquad \mathfrak{M}(\mathcal{B}, \nu) = \{X \in \mathfrak{P}(E) \mid \varphi_X \in \mathcal{M}_+(\mathcal{B}, \nu)\}$$

e sia $\mathfrak{A}^{(l)}(\mathcal{B}, \nu)$ la *σ-algebra* delle parti di E localmente misurabili rispetto a ν^* cioè (cfr. [14]: § 3, def. 4; [10]: § 4, def. 1)

$$(1.5.9) \qquad \mathfrak{A}^{(l)}(\mathcal{B}, \nu) = \{X \in \mathfrak{P}(E) \mid \forall A \in \mathfrak{A}(\mathcal{B}, \nu) : A \cap X \in \mathfrak{A}(\mathcal{B}, \nu)\}$$

dove $\mathfrak{A}(\mathcal{B}, \nu)$ è il *δ-anello* delle parti di E integrabili rispetto a ν^* ovvero (cfr. [14]: § 2, def. 1)

$$(1.5.10) \qquad \mathfrak{A}(\mathcal{B}, \nu) = \{X \in \mathfrak{P}(E) \mid \varphi_X \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu)\}.$$

Si ha il seguente

COROLL. 2. *Le seguenti quattro proprietà sono equivalenti:*

a) $\qquad 1_E \in \mathcal{M}_+(\mathcal{B}, \nu)$,

b) $\qquad \mathfrak{A}^*(\mathcal{B}, \nu) = \mathfrak{M}(\mathcal{B}, \nu)$,

c) $\qquad \mathfrak{A}^{(l)}(\mathcal{B}, \nu) = \mathfrak{M}(\mathcal{B}, \nu)$,

d) $\qquad \mathcal{M}(\mathcal{B}, \nu) = \mathcal{M}(\mathfrak{A}^{(l)}(\mathcal{B}, \nu))$ (6).

Dim. Essendo verificata la condizione (1.5.2), consegue dal teor. 1 del § 3 di [14].

Osservazione 3. A causa di *a)* $\Longleftrightarrow$ *c)* del teor. 1 del § 3 di [14], nel caso in esame la *a)* del corollario precedente equivale alla

(6) Con $\mathcal{M}(\mathfrak{A}^{(l)})(\mathcal{B}, \nu))$ si denota l'insieme delle funzioni misurabili in senso classico rispetto ad $\mathfrak{A}^{(l)}(\mathcal{B}, \nu)$ (cfr. [9]).

condizione seguente

$$(1.5.11) \qquad f \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu) \Longrightarrow \inf(1_E, f) \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu).$$

A tal riguardo si osservi, ulteriormente, che

LEM. 4. *Le seguenti due proprietà sono equivalenti:*

$a)$ $\qquad f \in \mathcal{B} \Longrightarrow \inf(1_E, f) \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu),$

$b)$ $\qquad f \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu) \Longrightarrow \inf(1_E, f) \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu).$

Dim. $a) \Longrightarrow b)$. Sia $f \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu)$, $0_E \leq f$. Esiste, allora (cfr. (1.4.1)) una successione monotona crescente $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ di elementi di $\mathcal{B}$ tale che $f = \sup_{n \in \mathrm{N}} (\inf(f, f_n))$. Si ha

$$\inf(1_E, f) = \sup_{n \in \mathrm{N}} (\inf(f, \inf(1_E, f_n)))$$

e poiché, a causa di $a)$, per ogni $n \in \mathrm{N}$ è $\inf(1_E, f_n) \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu)$, per ogni $n \in \mathrm{N}$ è anche $\inf(f, \inf(1_E, f_n)) \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu)$ donde, essendo $\nu^{(1)}(\inf(f, \inf(1_E, f_n))) \leq \nu^{(1)}(f)$, a causa del teorema della convergenza monotona risulta $\inf(1_E, f) \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu)$.

$b) \Longrightarrow a)$. È ovvia conseguenza di (1.5.1).

Osservazione 4. La $a)$ e, quindi, la $b)$ del lemma precedente è verificata ogniqualvolta è verificata la condizione seguente:

$$(1.5.12) \qquad f \in \mathcal{B} \Longrightarrow \inf(1_E, f) \in \mathcal{B}.$$

Denotata con μ_ν la *misura canonicamente associata a* ν^* (cfr. [14]: § 2, def. 1) dal teor. 1 del § 2 di [14] consegue, allora, che

COROLL. 3. *Le seguenti due proprietà sono equivalenti*:

$a)$ $\qquad \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu) = \mathcal{L}^1(\mathfrak{A}(\mathcal{B}, \nu), \mu_\nu),$

$b)$ $\qquad f \in \mathcal{B} \Longrightarrow \inf(1_E, f) \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu).$

Inoltre, vera a) o, equivalentemente, b), risulta che (cfr. [14]: § 1, n. 2; § 2, n. 2, conv. 1):

$$(1.5.13) \qquad \forall f \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu) : \nu^{(1)}(f) = \int f d\, \mu_\nu .$$

Sussiste ulteriormente la seguente proposizione la cui dimostrazione, analoga a quella del teor. 3 del § 4 di [13], riportiamo per comodità del Lettore.

PROP. 7. *Se f è un arbitrario elemento di $\mathcal{B}^*(\nu)$, le seguenti due proprietà sono equivalenti :*

$a)$ $\qquad f \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu)$,

$b)$ $\qquad \forall\, \varepsilon \in \mathrm{R}^*_+ \ \exists\, h \in \mathcal{B} \ \ni'\ \nu^*(|f - h|) < \varepsilon.$

Dim. $a) \Longrightarrow b)$. Sia $f \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu)$ e sia ε un arbitrario numero reale strettamente positivo. Esiste, allora, una successione monotona crescente $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ di elementi di $\mathcal{B}$ tale che

$$(1.5.14) \qquad f = \sup_{n \in \mathrm{N}} (\inf(f, f_n)) \quad \text{e} \quad \sup_{n \in \mathrm{N}} \nu(f_n) < \nu^{(1)}(f) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Ora, essendo per ogni $n \in \mathrm{N}$ $\nu^*(f_n) = \nu(f_n)$, la successione numerica $(\nu^*(f_n))_{n \in \mathrm{N}}$ risulta maggiorata e, quindi, a causa di (1.4.7), esiste $g \in \mathcal{B}^*(\nu)$ ed esiste $D \in \mathfrak{A}^{(0)}(\mathcal{B}, \nu)$ tale che (cfr. (1.5.14))

$$(1.5.15) \qquad \sup_{n \in \mathrm{N}} \varphi_{\mathrm{C}(D)} \cdot f_n = g \quad \text{e} \quad \nu^*(g) < \nu^{(1)}(f) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

D'altra parte, in forza di (*), per ogni $n \in \mathrm{N}$ è anche $f_n \in \in \mathcal{M}_+(\mathcal{B}, \nu)$ e, quindi (cfr. [13] : § 2, lem. 4) $\varphi_{\mathrm{C}(D)} \cdot f_n \in \mathcal{M}_+(\mathcal{B}, \nu)$ donde (cfr. [12]: § 1, prop. 3) $g \in \mathcal{M}_+(\mathcal{B}, \nu)$ e anche, per quanto sopra, $g \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu)$.

Da (1.5.15) consegue, allora, $\nu^{(1)}(g - f) < \frac{\varepsilon}{2}$ ovvero, essendo $0_E \leq \varphi_{\mathrm{C}(D)} \cdot (g - f)$,

$$(1.5.16) \qquad \nu^{(1)}(|g - f|) < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Ulteriormente, essendo, per ogni $n \in \mathrm{N}$, $0_E \leq \varphi_{\mathrm{C}(D)} \cdot (g - f_n)$, risulta

$$\lim_{n \to \infty} \nu^{(1)}(|g - f_n|) = 0$$

donde, per n sufficientemente grande, $\nu^{(1)}(|g - f_n|) < \frac{\varepsilon}{2}$. Da questa e da (1.5.16), non appena si assuma $h = f_n$, consegue $h \in \mathcal{B}$ e $\nu^*(|f - h|) = \nu^{(1)}(|f - h|) < \varepsilon$.

$b) \Longrightarrow a)$. Invero, se è vera la $b)$, f risulta aderente a $\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu)$ per la topologia dedotta dalla seminorma $N_1^{(\nu)}$ (cfr. (1.5.1)) e, quindi, $f \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu)$ (cfr. osserv. 3 del n. 4).

6. Siano $\mathcal{B}$ e ν quelli del n. 1 e si ponga

$$(1.6.1) \qquad \mathcal{D}(\mathcal{B}) = \{ f \in \mathcal{F}(E, \mathrm{R}) \mid \exists f' \in \mathcal{B} \ \exists f'' \in \mathcal{B} \ \ni' f = f' - f'' \}.$$

Osservazione 1. Evidentemente, risulta

$$(1.6.2) \qquad \mathcal{B} \subset \mathcal{D}(\mathcal{B}).$$

Tenuto conto di (1.1.1), (1.1.2) e (1.1.3), si ha che

PROP. 8. *$\mathcal{D}(\mathcal{B})$ è uno spazio di Riesz di funzioni reali definite in E.*

Tenuto conto di (1.1.1), (1.1.2), (1.1.5) e (1.1.6), per un noto teorema di Algebra (7) si ha che

PROP. 9. *Esiste una ed una sola forma lineare $\widehat{I}_\nu$ su $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ verificante la condizione seguente:*

$$(1.6.3) \qquad \forall f \in \mathcal{B} : \widehat{I}_\nu(f) = \nu(f).$$

Da (1.1.7), (1.6.1) e (1.6.2), a causa di (1.6.3) consegue che

PROP. 10. *La forma lineare $\widehat{I}_\nu$ è positiva.*

Si supponga, ora, come nel n. 5, che sia verificata la seguente condizione:

$$(*) \qquad f \in \mathcal{B} \Longrightarrow f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{B}, \nu).$$

Osservazione 2. Tenuto conto di (1.2.2), (1.2.4), (1.5.1) e (1.6.1), da $(*)$ consegue che (cfr. n. 4)

$$(1.6.4) \qquad \mathcal{D}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu), \ \ \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{B}) : \nu^{(1)}(f) = \widehat{I}_\nu(f).$$

(7) Siano E ed F arbitrari spazi vettoriali sul corpo reale e sia C un cono convesso di elementi di E tale che $E = C + (-C)$. Allora, se $t : C \to F$ è un omomorfismo positivamente omogeneo di C in F, esiste una ed una sola applicazione lineare $u : E \to F$ di E in F la cui restrizione a C coincide con t.

Da (1.6.4), essendo $\nu^{(1)}$ un integrale di Daniell (cfr. n. 4), consegue che

PROP. 11. *$\widehat{I}_\nu$ è un integrale di Daniell su $\mathcal{D}(\mathcal{B})$.*

Osservazione 3. Evidentemente $\widehat{I}_\nu$ è l'unico integrale di Daniell su $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ verificante la condizione (1.6.3).

È naturale, a questo punto, che si applichi a siffatto integrale di Daniell $\widehat{I}_\nu$ la teoria generale del prolungamento di Daniell-Stone. A tal fine e, nel far ciò, seguendo il procedimento indicato da G. AQUARO in [1], si ponga

$$(1.6.5)\quad \mathcal{D}^*(\mathcal{B},\nu)=\{f\in\mathcal{F}(E,\mathrm{R})\,|\,\exists\,(f_n)_{n\in\mathrm{N}}\in(\mathcal{D}(\mathcal{B}))^{\mathrm{N}},\ \forall\, n\in\mathrm{N}: f_n\leq f_{n+1},$$
$$|f|=\sup_{n\in\mathrm{N}}\,(\inf(|f|,f_n)),\ (\widehat{I}_\nu(f_n))_{n\in\mathrm{N}}\ \textit{è maggiorata}\,\}$$

e si denoti per ogni $f\in\mathcal{D}^*(\mathcal{B},\nu)$ con $(\widehat{I}_\nu)^*(f)$ l'*integrale superiore* di f rispetto a $\widehat{I}_\nu$.

Osservazione 4. Evidentemente, risulta

$$(1.6.6)\qquad \mathcal{B}^*(\nu)\subset\mathcal{D}^*(\mathcal{B},\nu),\ \ \forall f\in\mathcal{B}^*(\nu):(\widehat{I}_\nu)^*(f)\leq\nu^*(f).$$

Si passa a riconoscere che

PROP. 12. *Denotati rispettivamente con $\mathcal{L}^1(\mathcal{D}(\mathcal{B}),\widehat{I}_\nu)$ e con $\mathcal{S}(\mathcal{D}(\mathcal{B}),\widehat{I}_\nu)$ lo spazio di Riesz delle funzioni integrabili rispetto a $\widehat{I}_\nu$* (cfr. [1]) *e lo spazio di Riesz delle funzioni misurabili secondo Stone rispetto a $\mathcal{L}^1(\mathcal{D}(\mathcal{B}),\widehat{I}_\nu)$* (cfr. [10]: § 3, def. 1) *e denotato con $(\widehat{I}_\nu)_1$ l'unico prolungamento di $\widehat{I}_\nu$ a $\mathcal{L}^1(\mathcal{D}(\mathcal{B}),\widehat{I}_\nu)$, si ha che:*

1⁰) $\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B},\nu)=\mathcal{L}^1(\mathcal{D}(\mathcal{B}),\widehat{I}_\nu)$,

2⁰) $\forall f\in\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B},\nu):\nu^{(1)}(f)=(\widehat{I}_\nu)_1(f)$,

3⁰) $\mathcal{M}(\mathcal{B},\nu)=\mathcal{S}(\mathcal{D}(\mathcal{B}),\widehat{I}_\nu)$.

Dim. È, intanto, tenuto conto di (1.6.4) e della prop. 1 del § 2 di [14]

$$(1.6.7)\quad \mathcal{L}^1(\mathcal{D}(\mathcal{B}), \widehat{I_\nu}) \subset \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu), \ \forall f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{D}(\mathcal{B}), \widehat{I_\nu}) : \nu^{(1)}(f) = (\widehat{I_\nu})_1(f)$$

Sia, allora, f un arbitrario elemento positivo di $\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu)$. A causa della prima di (1.6.6) risulta

$$(1.6.8)\qquad f \in \mathcal{D}^*(\mathcal{B}, \nu).$$

Si consideri, ad arbitrio, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$, $0_E \leq \varphi$. A causa di (1.6.4) risulta $\varphi \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu)$ e $\nu^{(1)}(\varphi) = \widehat{I_\nu}(\varphi)$ e anche $\varphi \in \mathcal{B}^*(\nu)$ e $\nu^*(\varphi) = \widehat{I_\nu}(\varphi)$. Da qui, essendo $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{B}, \nu)$, consegue

$$(1.6\ 9)\qquad \widehat{I_\nu}(\varphi) = \nu^*(\inf(\varphi, f)) + \nu^*(\varphi - \inf(\varphi, f)).$$

D'altra parte, ancora per (1.6.6), si ha anche $\inf(\varphi, f) \in \mathcal{D}^*(\mathcal{B}, \nu)$ e $\varphi - \inf(\varphi, f) \in \mathcal{D}^*(\mathcal{B}, \nu)$ e, inoltre, $(\widehat{I_\nu})^*(\inf(\varphi, f)) \leq \nu^*(\inf(\varphi, f))$ e $(\widehat{I_\nu})^*(\varphi - \inf(\varphi, f)) \leq \nu^*(\varphi - \inf(\varphi, f))$. Pertanto, da (1.6.9) consegue

$$(I_\nu)^*(\inf)\varphi, f)) + (I_\nu)^*(\varphi - \inf(\varphi, f)) \leq \widehat{I_\nu}(\varphi).$$

Da qui, tenuto conto dell'arbitrarietà di φ, a causa del teor. 1 del n. 2 di [11] consegue $f \in \mathcal{S}(\mathcal{D}(\mathcal{B}), \widehat{I_\nu})$ e, quindi, per (1.6.8) (cfr. [1]), $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{D}(\mathcal{B}), \widehat{I_\nu})$. Dunque $\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu) \subset \mathcal{L}^1(\mathcal{D}(\mathcal{B}), \widehat{I_\nu})$ e questa, assieme alla (1.6.7), prova 1^0) e 2^0). La 3^0) è ovvia conseguenza di 1^0) e di (1.5.5).

PROP. 13. *$\mathcal{D}(\mathcal{B})$ è ovunque denso in $\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{B}, \nu)$ per la topologia dedotta dalla seminorma $N_1^{(\nu)}$.*

Dim. Consegue ovviamente dalla prop. 7.

Osservazione 4. Il risultato precedente consegue, volendo, dalla teoria del prolungamento di Daniell-Stone (cfr. ad es. [13]: teor. 3 del § 4). Analogamente, il risultato della prop. 6, tenuto conto di 1^0) e 2^0) della prop. 12. consegue, volendo, da (1.2.20) di [11].

7. Prima di concludere il presente § 1 si osservi che, assegnato uno spazio di Riesz $\mathcal{R}$ di funzioni reali definite in E ed un integrale di Daniell I su $\mathcal{R}$, non appena si assuma

$$\mathcal{B} = \{ f \in \mathcal{R} \mid 0_E \leq f \} \quad \text{e} \quad \nu = I|_{\mathcal{R}} \tag{1.7.1}$$ (8),

siffatti $\mathcal{B}$ e ν verificano le proprietà che vanno da (1.1.1) a (1.1.8). Dopo ciò, è immediato riconoscere che, riferendo i risultati precedenti a siffatto caso particolare, le funzioni integrabili rispetto a ν^* sono tutte e sole le funzioni integrabili rispetto a I nel senso del prolungamento di Daniell-Stone indicato in [1], mentre le funzioni misurabili rispetto a ν^* vengono ad essere tutte e sole le funzioni misurabili secondo Stone rispetto ad I (cfr. [11]).

A tal riguardo si osservi ancora che nel caso in esame, essendo verificata la condizione seguente

$$f \in \mathcal{B},\ g \in \mathcal{B},\ f \leq g \Longrightarrow g - f \in \mathcal{B}, \tag{1.7.2}$$

a causa del lem. 3 è banalmente verificata la condizione (*) del n. 5 e, con essa, le sue conseguenze indicate nel medesimo n. 5. In particolare (cfr. (1.6.2), (1.6.3) e (1.6.4)) $\nu^{(1)}$ risulta un prolungamento di ν coincidente con il prolungamento di Daniell-Stone di I.

§ 2. La seminorma di Beppo Levi canonicamente associata ad una misura positiva nel senso di Bourbaki.

1. In quanto segue E è uno spazio topologico localmente compatto (cfr. [2]: Chap. I, § 9, def. 4). In accordo con N. BOURBAKI, denotiamo con $\mathcal{K}(E)$ l'algebra delle funzioni reali continue a supporto compatto in E (cfr. [5]: Chap. III, n° 1, def. 1) e con $\mathcal{K}_+(E)$ il cono convesso degli elementi positivi di $\mathcal{K}(E)$. Denotiamo ulteriormente con $\mathcal{I}(E)$ e, nel far ciò, discostandoci da [5] (9), l'insieme delle funzioni reali *semicontinue inferiormente in E*.

(8) Con $I|_{\mathcal{R}}$ si denota la restrizione di I a $\mathcal{R}$.

(9) Si rammenti che per « funzione reale definita in E » intendiamo sempre un'applicazione di E in R cioè una funzione numerica a valori *ovunque finiti* in E.

Notoriamente (cfr. ad es. [3]: Chap. IV, § 6), denotato con $\mathcal{I}_+(E)$ il cono convesso degli elementi positivi di $\mathcal{I}(E)$, risulta che

(2.1.1) *I insieme arbitrario,* $(f_\iota)_{\iota\in I} \in (\mathcal{I}_+(E))^I$, $(f_\iota)_{\iota\in I}$ *maggiorata per* $\leq \Longrightarrow \sup\limits_{\iota\in I} f_\iota \in \mathcal{I}_+(E)$,

(2.1.2) *I insieme finito,* $(f_\iota)_{\iota\in I} \in (\mathcal{I}_+(E))^I \Longrightarrow \inf\limits_{\iota\in I} f_\iota \in \mathcal{I}_+(E)$.

Ulteriormente, si ha che (cfr. [5]: Chap. IV, § 1, n⁰ 1, lem. 1)

(2.1.3) $$\forall\, g \in \mathcal{I}_+(E) : g = \sup_{f\in\mathcal{K}_+(E),\, f\leq g} f.$$

2. Sia, ora, μ una *misura positiva* su E nel senso di BOURBAKI (cfr. [5]: Chap. III, § 1, def. 3 e n⁰ 5). Come è noto (cfr. [5]: Chap. IV, § 1, théor. 1; [4]: § 4, n⁰ 1, théor. 1), si ha che

(2.2.1) $H \in \mathfrak{P}(\mathcal{K}_+(E))$, $H \neq \emptyset$, *H maggiorata e filtrante per* $\leq$, $\sup\limits_{h\in H} h \in \mathcal{K}_+(E) \Longrightarrow \mu(\sup\limits_{h\in H} h) = \sup\limits_{h\in H} \mu(h)$.

Dopo ciò, si denoti con $\mathcal{I}_+(E,\mu)$ l'insieme definito nel modo seguente

(2.2.2) $$\mathcal{I}_+(E,\mu) = \{g \in \mathcal{I}_+(E) \mid (\mu(f))_{f\in\mathcal{K}_+(E),\, f\leq g} \text{ è maggiorata}\},$$

e sia μ^* la funzione reale definita su $\mathcal{I}_+(E,\mu)$ come segue

(2.2.3) $$\forall\, g \in \mathcal{I}_+(E,\mu) : \mu^*(g) = \sup_{f\in\mathcal{K}_+(E),\, f\leq g} \mu(f).$$

Osservazione 1. Evidentemente, si ha

(2.2.4) $$\mathcal{K}_+(E) \subset \mathcal{I}_+(E,\mu), \qquad \forall\, f \in \mathcal{K}_+(E) : \mu^*(f) = \mu(f).$$

Passiamo a riconoscere le proprietà fondamentali di $\mathcal{I}_+(E,\mu)$ e μ^*.

PROP. 1. *Risulta che*

(2.2.5) $\lambda \in \mathbf{R}$, $0 \leq \lambda$, $g \in \mathcal{I}_+(E,\mu) \Longrightarrow \lambda\cdot g \in \mathcal{I}_+(E,\mu)$, $\mu^*(\lambda\cdot g) = \lambda\cdot\mu^*(g)$.

Dim. Siano λ e g quelle previste in (2.2.5). L'asserto è ovvio per $\lambda = 0$. Sia, allora, $0 < \lambda$. E', intanto, $\lambda \cdot g \in \mathcal{I}_+(E)$. Sia $f \in \mathcal{K}_+(E)$ tale che $f \leq \lambda \cdot g$. Essendo $\frac{1}{\lambda} \cdot f \leq g$, a causa di (2.2.3) risulta $\mu(f) \leq \lambda \cdot \mu^*(g)$. Pertanto, la famiglia $(\mu(f))_{f \in \mathcal{K}_+(E), f \leq g}$ risulta maggiorata (da $\lambda \cdot \mu^*(g)$). Dunque $\lambda \cdot g \in \mathcal{I}_+(E, \mu)$ e $\mu^*(\lambda \cdot g) \leq \lambda \cdot \mu^*(g)$. Essendo, conseguentemente, $\lambda \cdot \mu^*(g) = \lambda \cdot \mu^*\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda \cdot g)\right) \leq \mu^*(\lambda \cdot g)$, si ha $\mu^*(\lambda \cdot g) = \lambda \cdot \mu^*(g)$.

PROP. 2. *Risulta che*

$$g \in \mathcal{I}_+(E),\ h \in \mathcal{I}_+(E, \mu),\ g \leq h \Longrightarrow g \in \mathcal{I}_+(E, \mu),\ \mu^*(g) \leq \mu^*(h). \tag{2.2.6}$$

Dim. Siano g e h quelle previste in (2.2.6) e sia $f \in \mathcal{K}_+(E)$ tale che $f \leq g$. E', allora, $f \leq h$ e, quindi, a causa di (2.2.3), $\mu(f) \leq \mu^*(h)$. Pertanto, la famiglia $(\mu(f))_{f \in \mathcal{K}_+(E), f \leq g}$ risulta maggiorata (da $\mu^*(h)$). Dunque $g \in \mathcal{I}_+(E, \mu)$ e $\mu^*(g) \leq \mu^*(h)$.

Osservazione 2. Da (2.2.6), in particolare, consegue che

$$g \in \mathcal{I}_+(E, \mu),\ h \in \mathcal{I}_+(E, \mu),\ g \leq h \Longrightarrow \mu^*(g) \leq \mu^*(h). \tag{2.2.7}$$

Osservazione 3. Da (2.1.2) e (2.2.7), ancora per (2.2.6), consegue che

$$g \in \mathcal{I}_+(E, \mu),\ h \in \mathcal{I}_+(E, \mu) \Longrightarrow \inf(f, g) \in \mathcal{I}_+(E, \mu). \tag{2.2.8}$$

Passiamo a riconoscere il seguente fondamentale risultato la cui dimostrazione, in sostanza analoga a quella di BOURBAKI (cfr. [5]: Chap. IV, § 1, n^0 1, théor. 1), riportiamo per comodità del Lettore.

TEOR. 1. *Se H è una parte non vuota di $\mathcal{I}_+(E, \mu)$ maggiorata e filtrante per $\leq$, posto $f = \sup_{h \in H} h$, le seguenti due proprietà sono equivalenti :*

a) $f \in \mathcal{I}_+(E, \mu)$,

b) $(\mu^*(h))_{h \in H}$ *è maggiorata.*

Inoltre, vera a) o, equivalentemente, b), risulta

$$\mu^*(f) = \sup_{h \in H} \mu^*(h). \tag{2.2.9}$$

Dim. $a) \Longrightarrow b)$. Consegue ovviamente da (2.2.9).

$b) \Longrightarrow a)$. E', intanto, (cfr. (2.1.1)) $f \in \mathcal{I}_+(E)$. Si ponga, per ogni $h \in H$

$$K_h = \{k \in \mathcal{K}_+(E) \mid k \leq h\}$$

e sia $K = \bigcup_{h \in H} K_h$. Essendo H filtrante per $\leq$, K risulta del pari filtrante per $\leq$ e, inoltre, poiché a causa di (2.1.3), per ogni $h \in H$ risulta $h = \sup_{k \in K_h} k$, è anche $f = \sup_{k \in K} k$.

Sia, ora, $g \in \mathcal{K}_+(E)$ tale che $g \leq f$. E', allora, $g = \sup_{k \in K} (\inf(g, k))$ e, quindi, a causa di (2.2.1),

$$\mu(g) = \sup_{k \in K} \mu(\inf(g, k)). \tag{2.2.10}$$

Se, poi, k è un arbitrario elemento di K ed h è un elemento di H tale che $k \leq h$, risulta $\mu(\inf(g, k)) \leq \mu(k) \leq \mu^*(h) \leq \sup_{h \in H} \mu^*(h)$ donde, per (2.2.10), $\mu(g) \leq \sup_{h \in H} \mu^*(h)$. Pertanto, la famiglia $(\mu(g))_{g \in \mathcal{K}_+(E),\, g \leq f}$ è maggiorata (da $\sup_{h \in H} \mu^*(h)$). Dunque $f \in \mathcal{I}_+(E, \mu)$ e, inoltre,

$$\mu^*(f) \leq \sup_{h \in H} \mu^*(h).$$

Poiché, infine, è $\sup_{h \in H} \mu^*(h) \leq \mu^*(f)$, resta provata la (2.2.9).

Osservazione 4. Dal risultato precedente consegue, in particolare, che

$$(f_n)_{n \in \mathrm{N}} \in (\mathcal{I}_+(E, \mu))^{\mathrm{N}}, \quad \forall\, n \in \mathrm{N} : f_n \leq f_{n+1},\ f \in \mathcal{I}_+(E, \mu), \tag{2.2.11}$$
$$\sup_{n \in \mathrm{N}} f_n = f \Longrightarrow \sup_{n \in \mathrm{N}} \mu^*(f_n) = \mu^*(f).$$

Sussiste l'ulteriore

PROP. 3. *Risulta che*

$$g \in \mathcal{I}_+(E, \mu),\ h \in \mathcal{I}_+(E, \mu) \Longrightarrow g + h \in \mathcal{I}_+(E, \mu), \tag{2.2.12}$$
$$\mu^*(g + h) = \mu^*(g) + \mu^*(h).$$

Dim. Consegue dal teorema precedente tenendo conto del fatto che, posto

$$H = \{\chi \in \mathcal{K}_+(E) \mid \exists\, (\varphi, \psi) \in \mathcal{K}_+(E) \times \mathcal{K}_+(E) \ni' \varphi \leq g,\ \psi \leq h,\ \chi = \varphi + \psi\},$$

risulta

$$g + h = \sup_{\chi \in H} \chi.$$

Osservazione 5. Dal risultato precedente, a causa di (2.1.1) e (2.2.6) consegue che

$$(2.2.13) \qquad g \in \mathcal{I}_+(E, \mu),\ h \in \mathcal{I}_+(E, \mu) \Longrightarrow \sup(g, h) \in \mathcal{I}_+(E, \mu).$$

3. Dai risultati precedenti si rileva immediatamente che $\mathcal{I}_+(E, \mu)$ e μ^* verificano le proprietà di $\mathcal{B}$ e ν che vanno da (1.1.1) a (1.1.8). Possiamo, pertanto, riferire al caso in esame i risultati ottenuti nel § 1. Si osservi, in primo luogo, che (cfr. (1.1.10) e (1.1.11))

$$(2.3.1) \qquad f \in \mathcal{I}_+(E, \mu) \Longrightarrow 0 \leq \mu^*(f),$$

$$(2.3.2) \qquad f \in \mathcal{I}_+(E, \mu),\ g \in \mathcal{I}_+(E, \mu),\ f \leq g,\ g - f \in \mathcal{I}_+(E, \mu) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mu^*(g - f) = \mu^*(g) - \mu^*(f).$$

Ulteriormente, denotato con $\mathcal{I}_+^*(E, \mu)$ l'insieme definito nel modo seguente

$$(2.3.3) \qquad \mathcal{I}_+^*(E, \mu) = \{ f \in \mathcal{F}(E, \mathrm{R}) \mid 0_E \leq f,$$

$$\exists\, (f_n)_{n \in \mathrm{N}} \in (\mathcal{I}_+(E, \mu))^{\mathrm{N}} \ni' \forall\, n \in \mathrm{N} : f_n \leq f_{n+1}\ ,$$

$$f = \sup_{n \in \mathrm{N}} (\inf(f, f_n)),\ (\mu^*(f_n))_{n \in \mathrm{N}} \text{ \emph{è maggiorata}} \},$$

e denotato, per ogni $f \in \mathcal{I}_+^*(E, \mu)$, con $\mu^{**}(f)$ l'estremo inferiore dell'insieme dei numeri reali ciascuno dei quali è del tipo $\sup_{n \in \mathrm{N}} \mu^*(f_n)$ con $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ successione monotona crescente di elementi di $\mathcal{I}_+(E, \mu)$ tale che $f = \sup_{n \in \mathrm{N}} (\inf(f, f_n))$ e $(\mu^*(f_n))_{n \in \mathrm{N}}$ sia maggiorata, $\mathcal{I}_+^*(E, \mu)$ risulta un cono convesso ereditario di funzioni reali positive definite in E includente $\mathcal{I}_+(E, \mu)$ (cfr. (1.2.2) e coroll. 1 del § 1) mentre μ^{**} risulta una seminorma di Beppo Levi su $\mathcal{I}_+^*(E, \mu)$ che qui viene denominata *seminorma di Beppo Levi canonicamente associata a* μ.

Osservazione 1. Si tenga presente che (cfr. (1.2.4))

$$(2.3.4) \qquad f \in \mathcal{I}_+(E, \mu) \Longrightarrow \mu^{**}(f) = \mu^*(f),$$

e, conseguentemente che (cfr. 2.2.4))

$$f \in \mathcal{K}_+(E) \Longrightarrow \mu^{**}(f) = \mu(f). \tag{2.3.5}$$

E' di particolare rilevanza il seguente

LEM. 1. *Risulta che*

$$\mathcal{I}_+(E, \mu) = \mathcal{I}_+(E) \cap \mathcal{I}_+^*(E, \mu). \tag{2.3.6}$$

Dim. E', intanto, $\mathcal{I}_+(E, \mu) \subset \mathcal{I}_+(E) \cap \mathcal{I}_+^*(E, \mu)$. Se, poi, f è un arbitrario elemento di $\mathcal{I}_+(E) \cap \mathcal{I}_+^*(E, \mu)$, si consideri $g \in \mathcal{K}_+(E)$ tale che $g \leq f$. Risulta (cfr. (2.3.5)) $\mu(g) \leq \mu^{**}(f)$. Pertanto, la famiglia $(\mu(g))_{g \in \mathcal{K}_+(E),\, g \leq f}$ è maggiorata (da $\mu^{**}(f)$) e ciò, essendo $f \in \mathcal{I}_+(E)$, prova che (cfr. (2.2.2)) $f \in \mathcal{I}_+(E, \mu)$.

§ 3. Funzioni misurabili e funzioni integrabili.

1. Fermi restando E e μ quelli del § 2, assumiamo la seguente

DEF. 1. *Si dice che una funzione reale positiva f definita in E è misurabile rispetto a μ ogniqualvolta f è misurabile rispetto a μ^{**}* (cfr. [12]: § 1, def. 1).

Osservazione 1. In altri termini, denotato con $\mathcal{M}_+(E, \mu)$ l'insieme delle funzioni positive misurabili rispetto a μ, per definizione si ha che

$$\mathcal{M}_+(E, \mu) = \{ f \in \mathcal{F}(E, \mathrm{R}) \mid 0_E \leq f,\ \varphi \in \mathcal{I}_+^*(E, \mu) \Longrightarrow \mu^{**}(\varphi) = \tag{3.1.1}$$
$$= \mu^{**}(\inf(\varphi, f)) + \mu^{**}(\varphi - \inf(\varphi, f)).$$

Dal lemma 3 del § 1 si deduce immediatamente che

LEM. 1. *Se f è un'arbitraria funzione reale positiva definita in E, le seguenti due proprietà sono equivalenti:*

a) *f è misurabile rispetto a μ,*

b) $\varphi \in \mathcal{I}_+(E, \mu) \Longrightarrow \mu^{*}(\varphi) = \mu^{**}(\inf(\varphi, f)) + \mu^{**}(\varphi - \inf(\varphi, f)).$

DEF. 2. *Si dice che una funzione reale f definita in E è misurabile rispetto a μ ogniqualvolta f è misurabile rispetto a μ^{**}* (cfr. [12]: § 1, def. 2).

Osservazione 2. In altri termini, denotato con $\mathcal{M}(E, \mu)$ l'insieme delle funzioni misurabili rispetto a μ, per definizione si ha che

$$(3.1.2) \qquad \mathcal{M}(E, \mu) = \{ f \in \mathcal{F}(E, \mathrm{R}) \mid f^{+} \in \mathcal{M}_{+}(E, \mu), f^{-} \in \mathcal{M}_{+}(E, \mu) \}.$$

Passiamo a dimostrare il seguente fondamentale

TEOR. 1. *Ogni elemento di $\mathcal{I}_{+}(E, \mu)$ è misurabile rispetto a μ.*

Dim. Sia f un arbitrario elemento di $\mathcal{I}_{+}(E, \mu)$. A causa del lemma precedente per riconoscere che f è misurabile rispetto a μ basta provare che per ogni $\varphi \in \mathcal{I}_{+}(E, \mu)$ risulta $\mu^{*}(\varphi) = \mu^{*}(\inf(\varphi, f)) + \mu^{**}(\varphi - \inf(\varphi, f))$. Ed invero, se $\varphi \in \mathcal{I}_{+}(E, \mu)$, essendo $f = \sup\limits_{h \in \mathcal{K}_{+}(E), h \leq f} h$, si ha

$$(3.1.3) \qquad \inf(\varphi, f) = \sup_{h \in \mathcal{K}_{+}(E), h \leq f} \inf(\varphi, h),$$

e, quindi, a causa del teor. 1 del § 2,

$$(3.1.4) \qquad \mu^{*}(\inf(\varphi, f)) = \sup_{h \in \mathcal{K}_{+}(E), h \leq f} \mu^{*}(\inf(\varphi, h)) .$$

Da (3.1.3) consegue, inoltre,

$$\varphi - \inf(\varphi, f) = \inf_{h \in \mathcal{K}_{+}(E), h \leq f} (\varphi - \inf(\varphi, h))$$

e, quindi, tenuto conto del fatto che per ogni $h \in \mathcal{K}_{+}(E)$ si ha $\varphi - \inf(\varphi, h) = \sup(\varphi, h) - h \in \mathcal{I}_{+}(E, \mu)$, si ha

$$\mu^{**}(\varphi - \inf(\varphi, f)) \leq \inf_{h \in \mathcal{K}_{+}(E), h \leq f} \mu^{*}(\varphi - \inf(\varphi, h))$$

donde, a causa di (3.1.4),

$$\mu^{**}(\varphi - \inf(\varphi, f)) \leq \mu^{*}(\varphi) - \mu^{*}(\inf(\varphi, f)).$$

Da qui, essendo $\mu^{*}(\varphi) - \mu^{*}(\inf(\varphi, f)) \leq \mu^{**}(\varphi - \inf(\varphi, f))$, consegue l'asserto.

COROLL. 1. *Ogni funzione reale positiva semicontinua inferiormente in E è misurabile rispetto a μ.*

Dim. Sia f una siffatta funzione e sia φ un arbitrario elemento di $\mathcal{I}_+(E, \mu)$. Da (2.2.8) consegue $\inf(\varphi, f) \in \mathcal{I}_+(E, \mu)$ e, quindi, a causa del teorema precedente, si ha $\inf(\varphi, f) \in \mathcal{M}_+(E, \mu)$. Pertanto, risulta (cfr. (3.1.11))

$$\mu^*(\varphi) = \mu^{**}(\inf(\varphi, \inf(\varphi, f))) + \mu^{**}(\varphi - \inf(\varphi, \inf(\varphi, f))) =$$
$$= \mu^{**}(\inf(\varphi, f)) + \mu^{**}(\varphi - \inf(\varphi, f)).$$

Da qui, tenuto conto dell'arbitrarietà di φ e del lem. 1 consegue che f è misurabile rispetto a μ.

2. Sussiste l'ulteriore

DEF. 3. *Si dice che una funzione reale f definita in E è integrabile rispetto a μ ogniqualvolta f è integrabile rispetto a μ^{**}* (cfr. [12]: § 1, def. 3).

Osservazione 1. In altri termini, denotato con $\mathcal{L}^{(1)}(E, \mu)$ l'insieme delle funzioni integrabili rispetto a μ, per definizione si ha che

$$\mathcal{L}^{(1)}(E, \mu) = \{ f \in \mathcal{F}(E, \mathrm{R}) \mid |f| \in \mathcal{I}_+^*(E, \mu), f \in \mathcal{M}(E, \mu) \}. \tag{3.2.1}$$

Osservazione 2. Come è noto (cfr. [12]: § 1) $\mathcal{L}^{(1)}(E, \mu)$ è uno *spazio di Riesz* di funzioni reali definite in E mentre la funzione reale $f \longmapsto \int f d\mu$ definita nel modo seguente

$$\forall f \in \mathcal{L}^{(1)}(E, \mu) : \int f d\mu = \mu^{**}(f^+) - \mu^{**}(f^-) \tag{3.2.2}$$

è un *integrale di Daniell* su $\mathcal{L}^{(1)}(E, \mu)$ per il quale sono verificati il teorema della convergenza monotona, il teorema della convergenza maggiorata, ecc.

Si osservi che

PROP 1. *Ogni elemento di $\mathcal{I}_+(E, \mu)$ è integrabile rispetto a μ e, inoltre,*

$$\forall f \in \mathcal{I}_+(E, \mu) : \int f d\mu = \mu^*(f). \tag{3.2.3}$$

Dim. Consegue dal fatto che, nel caso in esame, a causa del teor. 1 è verificata la condizione (*) del n. 5 del § 1.

Osservazione 3. In particolare si ha che (cfr. (2.2.4))

$$\mathcal{K}_+(E) \subset \mathcal{L}^{(1)}(E, \mu), \quad \forall f \in \mathcal{K}_+(E) : \int f \, d\mu = \mu(f). \tag{3.2.4}$$

Un criterio di integrabilità per funzioni semicontinue inferiormente positive viene indicato nella seguente proposizione.

PROP. 2. *Se f è una funzione reale positiva semicontinua inferiormente in E, le seguenti due proprietà sono equivalenti:*

a) $$f \in \mathcal{L}^{(1)}(E, \mu),$$

b) $$f \in \mathcal{I}_+(E, \mu).$$

Dim. Invero, a causa del risultato del teor. 1 e tenuto conto di (2.3.4), si ha

$$\mathcal{I}_+(E, \mu) = \mathcal{I}_+(E) \cap (\mathcal{I}_+^*(E, \mu) \cap \mathcal{M}_+(E, \mu)). \tag{3.2.5}$$

3. Sussiste il seguente fondamentale

TEOR. 2. *Denotato con $\mathcal{S}(E, \mu)$ lo spazio di Riesz delle funzioni misurabili secondo Stone rispetto a $\mathcal{L}^{(1)}(E, \mu)$* (cfr. [10]: § 3, def. 1), *risulta:*

$$\mathcal{M}(E, \mu) = \mathcal{S}(E, \mu). \tag{3.3.1}$$

Dim. Essendo verificata, nel caso in esame, a causa del teor. 1, la condizione (*) del n. 5 del § 1, l'asserto consegue dal coroll. 1 del § 1.

Si ha, allora, che (cfr. [10]: § 3, coroll. 2):

COROLL. 2. *L'insieme delle funzioni misurabili rispetto a μ* (def. 2) *è uno spazio di Riesz chiuso rispetto al passaggio al limite delle successioni convergenti.*

Sussiste l'ulteriore

COROLL. 3. *Ogni funzione reale semicontinua in E è misurabile rispetto a μ.*

Dim. Basta riconoscere che ogni funzione reale semicontinua inferiormente in E è misurabile rispetto a μ. A tal fine, sia f una siffatta funzione e si supponga, in un primo momento, che esista $a \in \mathrm{R}$ tale che per ogni $x \in E$ si abbia $a \leq f(x)$. Allora la funzione $f - a \cdot 1_E$ risulta semicontinua inferiormente in E ed ivi positiva. Pertanto, a causa del coroll. 1, $f - a \cdot 1_E$ risulta misurabile ed f stessa è misurabile. Se, poi, f è qualunque, essendo

$$f = \inf_{n \in \mathrm{N}} (\sup(f, -n \cdot 1_E))$$

ed essendo per ogni $n \in \mathrm{N}$ $\sup(f, -n \cdot 1_E)$ misurabile a causa del risultato particolare precedentemente considerato, f risulta misurabile in forza del coroll. 2.

4. Si ponga, ora,

$$\mathcal{J}^{(1)}(E, \mu) = \{ f \in \mathcal{F}(E, \mathrm{R}) \mid |f| \in \mathcal{J}_+^*(E, \mu) \} \tag{3.4.1}$$

e sia $N_1^{(\mu)}$ la funzione reale definita in $\mathcal{J}^{(1)}(E, \mu)$ nel modo seguente

$$\forall f \in \mathcal{J}^{(1)}(E, \mu) : N_1^{(\mu)}(f) = \mu^{**}(|f|). \tag{3.4.2}$$

Si tenga presente che (cfr. § 1 : n. 4) $\mathcal{J}^{(1)}(E, \mu)$ è uno spazio di Riesz di funzioni reali definite in E e $N_1^{(\mu)}$ è una effettiva *seminorma* su $\mathcal{J}^{(1)}(E, \mu)$ rispetto alla quale $\mathcal{J}^{(1)}(E, \mu)$ risulta uno *spazio di Riesz seminormato completo.*

Osservazione 1. Evidentemente si ha (cfr. (3.2.1))

$$\mathcal{L}^{(1)}(E, \mu) = \mathcal{J}^{(1)}(E, \mu) \cap \mathcal{M}(E, \mu), \tag{3.4.3}$$

ed $\mathcal{L}^{(1)}(E, \mu)$ è *chiuso* in $\mathcal{J}^{(1)}(E, \mu)$ per la topologia dedotta dalla seminorma $N_1^{(\mu)}$.

La prop. 5. del § 1 dà luogo alla seguente

PROP. 3. *Per un'arbitraria funzione reale f definita in E le seguenti due proprietà sono equivalenti:*

a) $f \in \mathcal{L}^{(1)}(E, \mu)$,

b) $\forall \varepsilon \in \mathrm{R}_+^* \; \exists g \in \mathcal{L}^{(1)}(E, \mu) \; \exists h \in \mathcal{L}^{(1)}(E, \mu) \ni' g \leq f \leq h,$

$$\int (h - g)\, d\mu < \varepsilon.$$

Si passa a riconoscere che

PROP. 4. *Se f è un arbitrario elemento di $\mathcal{I}_+^*(E, \mu)$, le seguenti tre proprietà sono equivalenti:*

a) $f \in \mathcal{L}^{(1)}(E, \mu)$,

b) $\forall\, \varepsilon \in \mathrm{R}_+^* \;\exists\, h \in \mathcal{I}_+(E, \mu) \ni' \mu^{**}(|f - h|) < \varepsilon$,

c) $\forall\, \varepsilon \in \mathrm{R}_+^* \;\exists\, k \in \mathcal{K}_+(E) \ni' \mu^{**}(|f - k|) < \varepsilon$.

Dim. a) e b) sono equivalenti a causa della prop. 7 del § 1. Poiché c) $\Longrightarrow$ b), basta riconoscere che b) $\Longrightarrow$ c). A tal fine, sia ε un arbitrario numero reale strettamente positivo e sia, come vuole la b), $h \in \mathcal{I}_+(E, \mu)$ tale che $\mu^{**}(|f - h|) < \frac{\varepsilon}{2}$. A causa di (2.2.3), esiste $k \in \mathcal{K}_+(E)$ tale che $k \leq h$ e $\mu^*(h) < \mu(k) + \frac{\varepsilon}{2}$. Da qui, consegue che (cfr. (2.3.2)) $\mu^{**}(|f - k|) \leq \mu^{**}(|f - h|) + (\mu^*(h) - \mu(k) < \varepsilon$.

COROLL. 4. *$\mathcal{K}(E)$ è ovunque denso in $\mathcal{L}^{(1)}(E, \mu)$ per la topologia dedotta dalla seminorma $N_1^{(\mu)}$.*

5. Sulla base del corollario precedente, il successivo lemma permette di riconoscere l'equivalenza della nozione di integrabilità rispetto a μ introdotta nella def. 3 con la nozione di integrabilità rispetto a μ di N. BOURBAKI (cfr. [5]).

A tal fine, si denoti con $\overline{\mathcal{I}}_+(E)$ l'insieme delle funzioni numeriche a valori non necessariamente finiti, positive e semicontinue inferiormente in E e sia $\overline{\mu}^*$ la funzione numerica, a sua volta a valori non necessariamente finiti, definita in $\overline{\mathcal{I}}_+(E)$ nel modo seguente:

$$\forall g \in \overline{\mathcal{I}}_+(E) : \overline{\mu}^*(g) = \sup_{f \in \mathcal{K}_+(E), f \leq g} \mu(f). \tag{3.5.1}$$

Osservazione 1. Evidentemente, si ha che

$$\forall g \in \mathcal{I}_+(E, \mu) : \overline{\mu}^*(g) = \mu^*(g). \tag{3.5.2}$$

Si passa a riconoscere il seguente

LEM. 2 *Se f è una funzione reale positiva definita in E, le seguenti due proprietà sono equivalenti:*

$$a) \qquad f \in \mathcal{I}_+^* (E, \mu),$$

$$b) \qquad \inf_{g \in \overline{\mathcal{I}}_+ (E), f \leq g} \overline{\mu}^* (g) < +\infty.$$

Inoltre, vera a) o, equivalentemente b), risulta

$$\mu^{**}(f) = \inf_{g \in \overline{\mathcal{I}}_+ (E), f \leq g} \overline{\mu}^* (g). \tag{3.5.3}$$

Dim. $a) \Longrightarrow b)$. Sia $f \in \mathcal{I}_+^* (E, \mu)$ e sia $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ un'arbitraria successione monotona crescente di elementi di $\mathcal{I}_+ (E, \mu)$ tale che

$$f = \sup_{n \in \mathrm{N}} (\inf (f, f_n))$$

e la successione numerica $(\mu^* (f_n))_{n \in \mathrm{N}}$ sia maggiorata. È, allora (cfr. [5]: Chap. IV, § 1, déf. 3 e théor. 3),

$$\inf_{g \in \overline{\mathcal{I}}_+ (E), f \leq g} \overline{\mu}^* (g) \leq \sup_{n \in \mathrm{N}} \overline{\mu}^* (f_n) = \sup_{n \in \mathrm{N}} \mu^* (f_n).$$

Con ciò, essendo la $(\mu^* (f_n))_{n \in \mathrm{N}}$ maggiorata, risulta vera la $b)$ e, inoltre, tenuto conto dell'arbitrarietà della $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ nonchè della definizione di μ^{**} si ha

$$\inf_{g \in \overline{\mathcal{I}}_+ (E), f \leq g} \overline{\mu}^* (g) \leq \mu^{**} (f). \tag{3.5.4}$$

$b) \Longrightarrow a)$. Sia vera la $b)$ e sia ε un arbitrario numero reale strettamente positivo. Esiste, allora, $\overline{g} \in \overline{\mathcal{I}}_+ (E)$ tale che $f \leq \overline{g}$ e

$$\overline{\mu}^* (\overline{g}) < \inf_{g \in \overline{\mathcal{I}}_+ (E), f \leq g} \overline{\mu}^* (g) + \varepsilon. \tag{3.5.5}$$

Ora è

$$\overline{g} = \sup_{n \in \mathrm{N}} (\inf (\overline{g}, n \cdot 1_E))$$

e, quindi, posto per ogni $n \in \mathrm{N}$

$$g_n = \inf(\bar{g}, n \cdot 1_E)),$$

risulta $f = \inf(f, \bar{g}) = \sup_{n \in \mathrm{N}} (\inf(f, g_n))$. Da qui, essendo per ogni $n \in \mathrm{N}$ $g_n \in \mathcal{I}_+(E, \mu)$ in quanto è $g_n \in \mathcal{I}_+(E, \mu)$ e $\bar{\mu}^*(g_n) \leq \bar{\mu}^*(\bar{g})$ cioè, per (3.5.5), $\bar{\mu}^*(g_n) < \inf_{g \in \bar{\mathcal{I}}_+(E), f \leq g} \bar{\mu}^*(g) + \varepsilon$, consegue $f \in \mathcal{I}_+^*(E, \mu)$ e, inoltre,

$$\mu^{**}(f) \leq \sup_{n \in \mathrm{N}} \bar{\mu}^*(g_n) \leq \inf_{g \in \bar{\mathcal{I}}_+(E), f \leq g} \bar{\mu}^*(g) + \varepsilon.$$

Da qui, tenuto conto dell'arbitrarietà di ε, consegue che $\mu^{**}(f) \leq$ $\leq \inf_{g \in \bar{\mathcal{I}}_+(E), f \leq g} \bar{\mu}^*(g)$ e, questa, assieme alla (3.5.4) prova la (3.5.3).

Dopo ciò, è di ovvia dimostrazione il seguente

COROLL. 5. *Una funzione reale positiva f definita in E è integrabile rispetto a μ* (def. 3) *se e soltanto se f è integrabile rispetto a μ nel senso di* N. BOURBAKI (cfr. [15]: Chap. IV) *e, in questo caso, si ha*

$$\int f \, d\mu = \inf_{g \in \bar{\mathcal{I}}_+(E), f \leq g} \bar{\mu}^*(g). \tag{3.5.6}$$

6. Introduciamo le ulteriori seguenti definizioni:

DEF 4. *Si dice che una funzione reale f definita in E è μ-nulla ogniqualvolta f è μ^{**}-nulla* (cfr. [13]: § 2, def. 1).

Osservazione 1. In altri termini, denotato con $\mathcal{L}^{(0)}(E, \mu)$ l'insieme delle funzioni μ-nulle, per definizione si ha che

$$\mathcal{L}^{(0)}(E, \mu) = \{ f \in \mathcal{I}(E, \mathrm{R}) \mid |f| \in \mathcal{I}_+^*(E, \mu), \mu^{**}(|f|) = 0 \}. \tag{3.6.1}$$

Osservazione 2. Come è noto (cfr. [13]: § 2, prop. 1 e coroll. 1) $\mathcal{L}^{(0)}(E, \mu)$ è uno *spazio di Riesz* di funzioni reali definite in E chiuso rispetto al passaggio al limite delle successioni convergenti. Da (2.1.4) di [13] consegue, inoltre, che

$$f \in \mathcal{F}(E, R),\ g \in \mathcal{L}^{(0)}(E, \mu),\ 0_E \leq g,\ |f| \leq g \Longrightarrow f \in \mathcal{L}^{(0)}(E, \mu). \tag{3.6.2}$$

Dal lem. 1 del § 2 di [13] consegue che

LEM. 3 *Se f è un'arbitraria funzione reale definita in E, le seguenti due proprietà sono equivalenti :*

$$a) \quad f \in \mathcal{L}^{(0)}(E, \mu),$$

$$b) \quad f \in \mathcal{L}^{(1)}(E, \mu), \int |f| \, d\mu = 0$$

DEF. 5. *Si dice che una parte D di E è μ-nulla ogniqualvolta D è μ^{**}-nulla* (cfr. [13]: § 2, def. 2).

Osservazione 3. In altri termini, denotato con $\mathfrak{N}^{(0)}(E, \mu)$ l'insieme delle parti di E μ-nulle, per definizione si ha che

$$\mathfrak{N}^{(0)}(E, \mu) = \{ D \in \mathfrak{P}(E) \mid \varphi_D \in \mathcal{L}^{(0)}(E, \mu) \}. \tag{3.6.3}$$

Osservazione 4. Come è noto (cfr. [13] : § 2, n. 2) $\mathfrak{N}^{(0)}(E, \mu)$ è un *σ-anello* di parti di E verificante la condizione seguente :

$$D \in \mathfrak{N}^{(0)}(E, \mu), X \in \mathfrak{P}(E), X \subset D \Longrightarrow X \in \mathfrak{N}^{(0)}(E, \mu). \tag{3.6.4}$$

Osservazione 5. Da (2.2.3) di [13] consegue che

$$D \in \mathfrak{N}^{(0)}(E, \mu) \Longleftrightarrow \varphi_D \in \mathcal{L}^{(1)}(E, \mu), \int \varphi_D \, d\mu = 0. \tag{3.6.5}$$

Dal lem. 2 del § 2 di [13] consegue che

LEM. 4. *Se f è un'arbitraria funzione reale definita in E, le seguenti due proprietà sono equivalenti :*

$$a) \quad f \in \mathcal{L}^{(0)}(E, \mu),$$

$$b) \quad \exists\, D \in \mathfrak{N}^{(0)}(E, \mu) \ni' \varphi_{\complement(D)} \cdot f = 0_E .$$

Osservazione 6. Si tenga presente che (cfr. (2.2.4) di [13])

$$D \in \mathfrak{N}^{(0)}(E, \mu), f \in \mathcal{F}(E, \mathrm{R}) \Longrightarrow \varphi_D \cdot f \in \mathcal{L}^{(0)}(E, \mu). \tag{3.6.6}$$

7. Una condizione sufficiente di integrabilità per funzioni positive viene indicata nella successiva

PROP. 5. *Sia f una funzione reale positiva definita in E. Allora, se per ogni ε reale strettamente positivo esiste una funzione g positiva e semicontinua superiormente in E ed esiste una funzione $h \in \mathcal{I}_+(E, \mu)$ tale che $g \leq f \leq h$ e $\mu^*(h - g) < \varepsilon$, f risulta integrabile rispetto a μ* (def. 3).

Dim. Sia f quella prevista nell'asserto e siano $(g_n)_{n \in \mathrm{N}}$ e $(h_n)_{n \in \mathrm{N}}$ rispettivamente una successione di funzioni positive semicontinue uperiormente in E ed una successione di funzioni appartenenti ad $\mathcal{I}_+(E, \mu)$ tali che per ogni $n \in \mathrm{N}$ si abbia

$$(3.7.1) \qquad g_n \leq f \leq h_n, \qquad \mu^*(h_n - g_n) < \frac{1}{n+1}.$$

Si ponga, per ogni $n \in \mathrm{N}$,

$$g'_n = \sup_{0 \leq k \leq n} g_k, \qquad h'_n = \inf_{0 \leq k \leq n} h_k.$$

Evidentemente la $(g'_n)_{n \in \mathrm{N}}$ risulta una successione monotona crescente di funzioni positive semicontinue superiormente in E mentre la $(h'_n)_{n \in \mathrm{N}}$ risulta una successione decrescente di elementi di $\mathcal{I}_+(E, \mu)$. Inoltre essendo, per ogni $n \in \mathrm{N}$, $h'_n \leq h_n$ e $g_n \leq g'_n$ nonchè $h'_n - g'_n \leq \leq h_n - g_n$, da (3.7.1) consegue

$$(3.7.2) \qquad g'_n \leq f \leq h'_n, \qquad \mu^*(h'_n - g'_n) < \frac{1}{n+1}.$$

Da quanto precede, tenuto conto del fatto che a causa di (2.2.7) e del risultato della prop. 2 la $(h'_n - g'_n)_{n \in \mathrm{N}}$ è una successione monotona decrescente di funzioni integrabili positive e, inoltre, che per la seconda di (3.7.2) risulta $\lim_{n \to \infty} \int (h'_n - g'_n)\, d\mu = 0$, a causa del lem. 3 consegue che $\inf_{n \in \mathrm{N}} (h'_n - g'_n) \in \mathcal{L}^{(0)}(E, \mu)$.

Ora, essendo, per ogni $n \in \mathrm{N}$, $0_E \leq f - g'_n \leq h'_n - g'_n$ e, quindi, anche $\inf_{n \in \mathrm{N}} (f - g'_n) \leq \inf_{n \in \mathrm{N}} (h'_n - g'_n)$, risulta (cfr. (3.6.2)) $\inf_{n \in \mathrm{N}} (f - g'_n) \in \in \mathcal{L}^{(0)}(E, \mu)$ donde $f - \sup_{n \in \mathrm{N}} g'_n \in \mathcal{L}^{(0)}(E, \mu)$. Da qui, essendo (cfr. coroll. 2 e 3) $\sup_{n \in \mathrm{N}} g'_n \in \mathcal{M}_+(E, \mu)$, consegue che $f \in \mathcal{M}_+(E, \mu)$ e poichè, a causa della prima di (3.7.2), si ha $f \in \mathcal{I}^*_+(E, \mu)$ risulta $f \in \mathcal{L}^{(1)}(E, \mu)$ (cfr. (3.2.1)).

La condizione di integrabilità di cui nella precedente proposizione in un caso di particolare interesse risulta anche necessaria. Ciò, con dimostrazione pressocchè analoga a quella di N. BOURBAKI (cfr. [5]: Chap. IV, § 4, théor. 3), viene riconosciuto nella successiva proposizione alla quale si premette il seguente

LEM. 5. *Sia* $f \in \mathcal{I}_+^*(E, \mu)$. *Allora, se esiste* $h \in \mathcal{I}_+(E)$ *tale che* $f \leq h$, *per ogni* ε *reale strettamente positivo esiste* $\chi \in \mathcal{I}_+(E, \mu)$ *tale che* $f \leq \chi$ *e* $\mu^*(\chi) < \mu^{**}(f) + \varepsilon$.

Dim. Siano f e h quelle previste nell'asserto. Sia ε un numero reale strettamente positivo. Esiste, allora, una successione monotona crescente $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ di elementi di $\mathcal{I}_+(E, \mu)$ tale che

$$f = \sup_{n \in \mathrm{N}} (\inf(f, f_n)) \text{ e } \lim_{n \to \infty} \mu^*(f_n) < \mu^{**}(f) + \varepsilon \tag{3.7.3}$$

Dopo ciò posto, per ogni $n \in \mathrm{N}$,

$$\chi_n = \inf(f_n, h), \tag{3.7.4}$$

la $(\chi_n)_{n \in \mathrm{N}}$ risulta a sua volta una successione monotona crescente di elementi di $\mathcal{I}_+(E, \mu)$ in quanto per ogni $n \in \mathrm{N}$ è $\chi_n \in \mathcal{I}_+(E)$ e, inoltre, $\chi_n \leq f_n$. Ulteriormente, posto $\chi = \sup_{n \in \mathrm{N}} \chi_n$, essendo a causa di (3.7.3) e (3.7.4) la successione $(\mu^*(\chi_n))_{n \in \mathrm{N}}$ maggiorata (da $\mu^{**}(f) + \varepsilon$), per il teor. 1 del § 2 si ha $\chi \in \mathcal{I}_+(E, \mu)$ e, inoltre,

$$\mu^*(\chi) < \mu^{**}(f) + \varepsilon.$$

Dalla prima di (3.7.3) e da (3.7.4) consegue, da ultimo, che

$$f = \sup_{n \in \mathrm{N}} (\inf(\inf(f, h), f_n)) = \sup_{n \in \mathrm{N}} (\inf(f, \inf(f_n, h)) =$$

$$= \sup_{n \in \mathrm{N}} (\inf(f, \chi_n)) \leq \sup_{n \in \mathrm{N}} \chi_n = \chi.$$

PROP. 6. *Sia f una funzione reale positiva integrabile rispetto a μ. Allora, se esiste una funzione h' semicontinua inferiormente in E tale che $f \leq h'$, per ogni ε reale strettamente positivo esiste una funzione g positiva semicontinua superiormente ed a supporto compatto* *in* E *ed esiste una funzione* $h \in \mathcal{I}_+(E, \mu)$ *tale che* $g \leq f \leq h$ *e, inoltre,* $\int (h - g)\, d\mu < \varepsilon$.

Dim. Sia f quella prevista nell'asserto e sia ε un arbitrario numero reale strettamente positivo. A causa di $a) \Longrightarrow c)$ della prop. 4. esiste, allora $k \in \mathcal{K}_+(E)$ tale che

$$\int |f - k|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{3.7.5}$$

Ora, essendo $0_E \leq |f - k| \leq h' + k$ con $h' + k \in \mathcal{I}_+(E)$, a causa del lemma precedente esiste $\chi \in \mathcal{I}_+(E, \mu)$ tale che

$$|f - k| \leq \chi \tag{3.7.6}$$

e, inoltre, $\mu^*(\chi) < \int |f - k|\, d\mu + \frac{\varepsilon}{4}$ donde, per (3.7.5),

$$\mu^*(\chi) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.7.7}$$

Si assuma

$$g = (k - \chi)^+ \qquad \text{e} \qquad h = k + \chi. \tag{3.7.8}$$

Evidentemente g risulta positiva e semicontinua superiormente in E mentre h è un elemento di $\mathcal{I}_+(E, \mu)$. Inoltre essendo, a causa di (3.7.6) $k - \chi \leq f \leq k + \chi$ e, quindi, $(k - \chi)^+ \leq f \leq k + \chi$, si ha anche $g \leq f \leq h$, mentre, essendo $k - \chi \leq k$ e, quindi, $g \leq k$ nonchè $Spt(g) \subset Spt(k)$ (10), la g viene a risultare a supporto compatto. Da ultimo, tenuto conto di (3.7.7) e ancora di (3.7.8), si ha

$$\int (h - g)\, d\mu = \int (k + \chi - \sup(k - \chi, 0_E))\, d\mu =$$
$$= \int (\chi + \inf(\chi, k))\, d\mu < \varepsilon.$$

8. G. Aquaro, in una nota attualmente in corso di redazione, ha indicato un metodo per far rientrare la teoria dell'integrazione rispetto ad una *misura positiva* μ di N. Bourbaki (cfr. [5]) nella

(10) Con $Spt(g)$ si denota il supporto della funzione g.

teoria del prolungamento di Daniell-Stone ottenuta seguendo il procedimento indicato in [1]. Ciò viene effettuato costruendo direttamente a partire da μ un opportuno integrale di Daniell denominato «canonicamente associato a μ» ed applicando a siffatto integrale la teoria del prolungamento di Daniell-Stone di cui sopra.

L'integrale di Daniell canonicamente associato a μ viene qui appresso costruito per altra via adoperando i risultati della presente trattazione, mentre nel successivo teor. 3 viene riconosciuta l'equivalenza dei due metodi di integrazione.

Più precisamente, si ponga

$$\mathcal{D}(E,\mu)=\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{E},\mathrm{R})\,|\,\exists f'\in\mathcal{I}_+(E,\mu)\,\exists f''\in\mathcal{I}_+(E,\mu)\ni' f=f'-f''\}. \tag{3.8.1}$$

Osservazione 1. Evidentemente, si ha

$$\mathcal{I}_+(E,\mu)\subset\mathcal{D}(E,\mu)\subset\mathcal{L}^{(1)}(E,\mu). \tag{3.8.2}$$

Dalla prop. 8 del § 1 consegue che

PROP. 7. *$\mathcal{D}(E,\mu)$ è uno spazio di Riesz di funzioni reali definite in E.*

Dalle prop. 9, 10 e 11 del § 1 consegue che

PROP. 8. *Esiste uno ed uno solo integrale di Daniell $\widehat{I}_\mu$ su $\mathcal{D}(E,\mu)$ verificante la condizione seguente:*

$$\forall f\in\mathcal{I}_+(E,\mu):\widehat{I}_\mu(f)=\mu^*(f). \tag{3.8.3}$$

TEOR. 3. *Denotati rispettivamente con $\mathcal{L}^1(\mathcal{D}(E,\mu),\widehat{I}_\mu)$ e con $\mathcal{S}(\mathcal{D}(E,\mu),\widehat{I}_\mu)$ lo spazio di Riesz delle funzioni integrabili rispetto a $\widehat{I}_\mu$* (cfr. [1]) *e lo spazio di Riesz delle funzioni misurabili secondo Stone rispetto a $\mathcal{L}^1(\mathcal{D}(E,\mu),\widehat{I}_\mu)$* (cfr. [10]: § 3, def. 1) *e denotato con $(\widehat{I}_\mu)_1$ l'unico prolugamento di $\widehat{I}_\mu$ a $\mathcal{L}^1(\mathcal{D}(E,\mu),\widehat{I}_\mu)$* (cfr. [1]), *risulta:*

1°) $\mathcal{L}^{(1)}(E,\mu)=\mathcal{L}^1(\mathcal{D}(E,\mu),\widehat{I}_\mu)$,

2°) $\forall f\in\mathcal{L}^{(1)}(E,\mu):\int f\,d\mu=(\widehat{I}_\mu)_1(f)$,

3°) $\mathcal{M}(E,\mu)=\mathcal{S}(\mathcal{D}(E,\mu),\widehat{I}_\mu)$.

Dim. Invero, nel caso in esame, a causa del teor. 1 è verificata la condizione (*) del n. 5 del § 1. Pertanto l'asserto consegue ovviamente dalla prop. 12 del medesimo § 1.

Osservazione 2. Tenuto conto di (2.2.3), si ha che

$$f \in D(E, \mu),\ 0_E \leq f \Longrightarrow \int f d\mu = \inf_{h \in \mathcal{I}_+(E,\mu),\, f \leq h} \mu^*(h). \tag{3.8.4}$$

§ 4. Insiemi integrabili ed insiemi misurabili.

1. Assumiamo le seguenti definizioni:

DEF. 1. *Si dice che una parte X di E è integrabile rispetto a μ ogniqualvolta X è integrabile rispetto a μ^{**}* (cfr. [14]: § 2, def. 1).

Osservazione 1. Denotato con $\mathfrak{A}(E, \mu)$ l'insieme delle parti di E integrabili rispetto a μ, per definizione si ha che

$$\mathfrak{A}(E, \mu) = \{X \in \mathfrak{P}(E) \mid \varphi_X \in \mathcal{L}^{(1)}(E, \mu)\}. \tag{4.1.1}$$

Osservazione 2. Evidentemente $\mathfrak{A}(E, \mu)$ è un *δ-anello* di parti di E.

Osservazione 3. Prescindendo dal risultato del coroll. 5 del § 3, dalle prop. 5 e 6 del medesimo § 3, tenuto conto del théor. 3 del § 4 del Chap. IV di [5], si ha che

(4.1.2) *una parte X di E è integrabile rispetto a μ se e soltanto se X è integrabile rispetto a μ nel senso di* N. BOURBAKI (cfr. [5]: Chap. IV, § 4, def. 2).

DEF. 2. *Dicesi misura canonicamente associata a μ la misura canonicamente associata a μ^{**}* (cfr. [14]: § 2, def. 2).

Osservazione 4. Denotata con $\mu^{(1)}$ la misura canonicamente associata a μ, si ha che

$$\forall\, X \in \mathfrak{A}(E, \mu) : \mu^{(1)}(X) = \int \varphi_X \, d\mu. \tag{4.1.3}$$

Osservazione 5. Poichè nel caso in esame è verificata la condizione seguente

$$f \in \mathcal{L}^{(1)}(E, \mu) \Longrightarrow \inf(1_E, f) \in \mathcal{L}^{(1)}(E, \mu), \tag{4.1.4}$$

in quanto è $1_E \in \mathcal{M}_+(E,\mu)$ (cfr. § 3 : coroll. 3), a causa del coroll. 3 e del lem. 4 del § 1 si ha che

$$(4.1.5)\quad \mathcal{L}^{(1)}(E,\mu)=\mathcal{L}^1(\mathfrak{U}(E,\mu),\mu^{(1)}),\ \forall f\in\mathcal{L}^{(1)}(E,\mu):\int f d\mu=\int f d\mu^{(1)}.$$

2. Si ponga

$$(4.2.1)\qquad \mathfrak{U}_{E,\mu}=\{X\in\mathfrak{P}(E)\mid \varphi_X\in\mathcal{I}_+^*(E,\mu)\}.$$

Osservazione 1. $\mathfrak{U}_{E,\mu}$ è un anello e, quindi, un *δ-anello ereditario* di parti di E (cfr. [14] : § 3, lem. 1).

Osservazione 2. Evidentemente, risulta (cfr. (4.1.1) e (3.2.1))

$$(4.2.2)\qquad \mathfrak{U}(E,\mu)\subset\mathfrak{U}_{E,\mu}.$$

Per contro, si ha la seguente

PROP. 1. *Se X è un'insieme aperto* (rispettiv. *chiuso*) *di E, le seguenti due proprietà sono equivalenti :*

a) $X\in\mathfrak{U}(E,\mu)$,

b) $X\in\mathfrak{U}_{E,\mu}$.

Dim. Invero, essendo X aperto (rispettiv. chiuso), φ_X risulta semicontinua inferiormente (rispettiv. superiormente) in E e, quindi (§ 3 : coroll. 3), misurabile rispetto a μ. Pertanto è $\varphi_X\in\mathcal{I}_+^*(E,\mu)$ se e soltanto se $\varphi_X\in\mathcal{L}^{(1)}(E,\mu)$ cfr. (3.2.1)).

PROP. 2. *Ogni insieme aperto relativamente compatto appartiene ad* $\mathfrak{U}_{E,\mu}$.

Dim. Invero, se X è un siffatto insieme, esiste $k\in\mathcal{K}_+(E)$ tale che $\varphi_X\leq k$ (cfr. [5] : Chap. III, § 1, n^0 2, lem. 1). Ma, allora, essendo anche $k\in\mathcal{I}_+^*(E,\mu)$, consegue $\varphi_X\in\mathcal{I}_+^*(E,\mu)$ e, quindi, $X\in\mathfrak{U}_{E,\mu}$.

COROLL. 1. *Ogni insieme aperto relativamente compatto è integrabile rispetto a μ.*

Dim. Consegue dalle precedenti due proposizioni.
Sussiste l'ulteriore

PROP. 3. *Ogni insieme relativamente compatto appartiene ad* $\mathfrak{U}_{E,\mu}$.

Dim. Invero, se X è un siffatto insieme, esiste un insieme aperto relativamente compatto in cui esso è contenuto (cfr. [2]: Chap. I, § 9, n^0 7, prop. 10). Dopo ciò, l'asserto consegue dalla prop. 2 a causa della ereditarietà di $\mathfrak{A}_{E,\mu}$.

COROLL. 2. *Ogni insieme compatto è integrabile rispetto a* μ.

Dim. Invero, un qualunque insieme compatto è chiuso e, quindi, relativamente compatto. Pertanto (prop. 3) esso appartiene ad $\mathfrak{A}_{E,\mu}$ e, quindi (prop. 1) ad $\mathfrak{A}(E, \mu)$.

Assumiamo l'ulteriore

DEF. 3. *Dicesi misura esterna canonicamente associata a* μ *la misura esterna canonicamente associata a* μ^{**} (cfr. [14]: § 3, def. 2).

Osservazione 3. Denotata con $\mu^{(e)}$ la misura esterna canonicamente associata a μ, si ha che

$$\forall X \in \mathfrak{A}_{E,\mu} : \mu^{(e)}(X) = \mu^{**}(\varphi_X). \tag{4.2.3}$$

Dimostriamo la seguente

PROP. 4. *Se X è un'arbitraria parte di E, le seguenti due proprietà sono equivalenti:*

a) $X \in \mathfrak{A}_{E,\mu}$,

b) $\exists\, G \in \mathfrak{A}(E, \mu),\ G = \overset{\circ}{G} \ni' X \subset G$.

Inoltre vera a) o, equivalente b), risulta

$$\mu^{(e)}(X) = \inf_{G = \overset{\circ}{G},\ G \in \mathfrak{A}(E,\mu),\ X \subset G} \mu^{(1)}(G). \tag{4.2.4}$$

Dim. $a) \Longrightarrow b)$ Fissato ε reale strettamente positivo, si ponga

$$\delta = \frac{\mu^{(e)}(X) + 1}{\varepsilon}, \qquad \eta = \frac{1}{1 + \delta}. \tag{4.2.5}$$

Evidentemente è $0 < \eta < 1$. Pertanto, essendo $X \in \mathfrak{A}_{E,\mu}$ e, quindi, $\varphi_X \in \mathcal{J}_+^*(E, \mu)$, a causa del lem. 5 del § 3 esiste $\chi \in \mathcal{J}_+(E, \mu)$

tale che

$$\varphi_X \leq \chi, \; \mu^*(\chi) < \mu^{(e)}(X) + \varepsilon. \tag{4.2.6}$$

Ulteriormente, posto $G = \{x \in E \mid 1 - \eta < \chi(x)\}$, essendo χ semicontinua inferiormente risulta $\overset{\circ}{G} = G$ e, inoltre, a causa della prima di (4.2.6), $X \subset G$. Ora, essendo $(1 - \eta)\cdot\varphi_G \leq \chi$ e, quindi,

$$\varphi_G \leq \frac{1}{1-\eta}\cdot\chi, \tag{4.2.7}$$

risulta $\varphi_G \in \mathcal{J}_+^*(E, \mu)$ donde $G \in \mathfrak{U}_{E,\mu}$ ovvero (prop. 1) $G \in \mathfrak{U}(E, \mu)$.

Da ultimo, tenuto conto di (4.2.5), della seconda di (4.2.6) e di (4.2.7), si ha

$$\mu^{(e)}(G) < \frac{1}{1-\eta}\cdot(\mu^{(e)}(X) + \eta) = \frac{\mu^{(e)}(X) + 1}{\delta} + \mu^{(e)}(X) = \mu^{(e)}(X) + \varepsilon.$$

Resta, con ciò, provata la b) e, con essa, la (4.2.4).

$b) \Longrightarrow a)$. Tenuto conto di (4.2.2), consegue dall'ereditarietà di $\mathfrak{U}_{E,\mu}$.

Sussiste il fondamentale

TEOR. 1. *Se X è un'arbitraria parte di E, le seguenti due proprietà sono equivalenti :*

a) $X \in \mathfrak{U}(E, \mu)$,

b) $\forall\, \varepsilon \in \mathrm{R}_+^* \; \exists\, K \in \mathfrak{P}(E)$, K *compatto*, $\exists\, G \in \mathfrak{U}(E, \mu)$, $G = \overset{\circ}{G}$,

$\exists'\, K \subset X \subset G$, $\mu^{(1)}(G) - \mu^{(1)}(K) < \varepsilon$.

Dim. $a) \Longrightarrow b)$. Sia ε un arbitrario numero reale strettamente positivo. Essendo X integrabile rispetto a μ e, quindi (cfr. (4.2.2)), $X \in \mathfrak{U}_{E,\mu}$, a causa di (4.2.4) esiste un insieme aperto G integrabile rispetto a μ tale che

$$X \subset G \quad \text{e} \quad \mu^{(1)}(G) < \mu^{(1)}(X) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.2.8}$$

D'altra parte, a causa della prop. 6 del § 3, esiste una funzione positiva semicontinua superiormente ed a supporto compatto

g tale che

$$g \leq \varphi_X \quad \text{e} \quad \int (\varphi_X - g)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.2.9}$$

Dopo ciò, si ponga

$$\delta = \frac{1}{\mu^{(1)}(X) + 1} \cdot \frac{\varepsilon}{4}$$

e sia

$$K = \{x \in E \mid \delta \leq g(x)\}.$$

Evidentemente K è compatto in quanto chiuso e contenuto nel supporto di g. D'altra parte, a causa della prima di (4.2.9), risulta $K \subset X$ e anche $g \leq \varphi_K + \delta \cdot \varphi_X$ donde

$$\int g d\mu \leq \mu^{(1)}(K) + \delta \cdot \mu^{(1)}(X).$$

Da questa, a causa della seconda di (4.2.9), consegue $\mu^{(1)}(X) < < \mu^{(1)}(K) + \delta \cdot \mu^{(1)}(X) + \frac{\varepsilon}{4}$ e, quindi, $\mu^{(1)}(X) < \mu^{(1)}(K) + \frac{\varepsilon}{2}$ da cui, per la seconda di (4 2.8), $\mu^{(1)}(G) - \mu^{(1)}(K) < \varepsilon$.

$b) \Longrightarrow a)$. Tenuto conto di (4.1.2) e del coroll. 2 consegue dalla prop. 3 del § 3.

COROLL. 3. *Se X è un arbitrario elemento di $\mathfrak{U}_{E,\mu}$, le seguenti due proprietà sono equivalenti :*

a) $X \in \mathfrak{U}(E, \mu)$,

b) $\forall\, \varepsilon \in \mathrm{R}^*_+ \,\exists\, K \in \mathfrak{P}(E)$, *$K$ compatto*, $\ni' K \subset X$, $\mu^{(e)}(X - K) < \varepsilon$.

Inoltre, vera a) o, equivalentemente, b), risulta

$$\mu^{(1)}(X) = \sup_{K \in \mathfrak{P}(E),\, K \text{ compatto},\, K \subset X} \mu^{(1)}(K). \tag{4.2.10}$$

Dim. $a) \Longrightarrow b)$. Consegue da $a) \Longrightarrow b)$ del teorema precedente.

$b) \Longrightarrow a)$. Consegue dal coroll. 2 e dal coroll. 4 del § 3.

Sussiste, ulteriormente, il seguente

COROLL. 4. *Se X è un'arbitraria parte di E, le seguenti due proprietà sono equivalenti :*

$a)$ $X \in \mathfrak{U}(E, \mu)$,

$b)$ *esiste un insieme* X_1 *contenuto in* X *riunione di una successione di insiemi compatti a due a due disgiunti e tale che* $X - X_1 \in \mathfrak{U}^{(0)}(E, \mu)$ *ed esiste un insieme* X_2 *contenente* X *intersezione di una successione di insiemi aperti integrabili e tale che* $X_2 - X \in \mathfrak{U}^{(0)}(E, \mu)$.

Dim. $a) \Longrightarrow b)$. Sia $(K_n)_{n \in \mathrm{N}}$ la successione di insiemi compatti definita per ricorrenza del modo seguente (cfr. teor. 1).

$$(4.2.11) \qquad K_0 \subset X, \quad \mu^{(1)}(X - K_0) < 1, \quad K_n \subset X - \bigcup_{i=0}^{n-1} K_i,$$

$$\mu^{(1)}\left(\left(X - \bigcup_{i=0}^{n-1} K_i\right) - K_n\right) < \frac{1}{n+1} \text{ per } 1 \leq n.$$

Posto $X_1 = \bigcup_{n \in \mathrm{N}} K_n$, risulta $X_1 \in \mathfrak{U}(E, \mu)$, $X_1 \subset X$ e, inoltre

$$\int \varphi_{X - X_1} d\mu = \inf_{n \in \mathrm{N}} \mu^{(1)}\left(\left(X - \bigcup_{i=0}^{n-1} K_i\right) - K_n\right) = 0.$$

cioè (cfr. lem. 3 del § 3) $\varphi_{X - X_1} \in \mathcal{L}^{(0)}(E, \mu)$ ovvero $X_1 - X \in \mathfrak{U}^{(0)}(E, \mu)$.

Si consideri ulteriormente (teor. 1) una successione, che si può supporre monotona decrescente, $(G_n)_{n \in \mathrm{N}}$ di insiemi aperti integrabili rispetto a μ tale che per ogni $n \in \mathrm{N}$ si abbia $X \subset G_n$ e $\mu^{(1)}(G_n) - \mu^{(1)}(X) < \dfrac{1}{n+1}$.

Posto $X_2 = \bigcap_{n \in \mathrm{N}} G_n$, risulta $X_2 \in \mathfrak{U}(E, \mu)$, $X \subset X_2$ e, inoltre,

$$\int \varphi_{X - X_2} d\mu = \inf_{n \in \mathrm{N}} \mu^{(1)}(G_n) - \mu^{(1)}(X) = 0,$$

cioè $X_2 - X \in \mathfrak{U}^{(0)}(E, \mu)$.

$b) \Longrightarrow a)$. Poichè l'insieme X_1 previsto in $b)$ è integrabile in quanto riunione di una successione di insiemi integrabili contenuti in X_2 (che è integrabile), essendo $X = X_1 \cup (X - X_1)$, risulta $X \in \mathfrak{U}(E, \mu)$.

3. Assumiamo l'ulteriore

DEF. 4. *Si dice che una parte X di E è misurabile rispetto a μ ogniqualvolta X è misurabile rispetto a μ^{**}* (cfr. [14]: § 2, def. 3).

Osservazione 1. Denotato con $\mathfrak{M}(E, \mu)$ l'insieme delle parti di E misurabili rispetto a μ, per definizione si ha che

$$(4.3.1) \qquad \mathfrak{M}(E, \mu) = \{X \in \mathfrak{P}(E) \mid \varphi_X \in \mathcal{M}_+(E, \mu)\}.$$

Osservazione 2. Evidentemente risulta (cfr. (3.1.7) di [14])

$$(4.3.2) \qquad \mathfrak{U}(E, \mu) = \mathfrak{U}_{E,\mu} \cap \mathfrak{M}(E, \mu).$$

PROP. 5. *Gli insiemi aperti e gli insiemi chiusi sono misurabili rispetto a μ.*

Dim. Consegue dal coroll. 3 del § 3.

Osservazione 3. Dal coroll. 2 del § 2, essendo $E \in \mathfrak{M}(E, \mu)$, consegue evidentemente che $\mathfrak{M}(E, \mu)$ è una *σ-algebra* di parti di E.

Introduciamo ancora la seguente

DEF. 5. *Si dice che una parte X di E è localmente misurabile rispetto a μ ogniqualvolta X è localmente misurabile rispetto a μ^{**}* (cfr. [14]: § 2, def. 3).

Osservazione 4. Denotato con $\mathfrak{U}^{(l)}(E, \mu)$ l'insieme delle parti di E localmente misurabili rispetto a μ, per definizione si ha che

$$(4.3.3) \qquad \mathfrak{U}^{(l)}(E, \mu) = \{X \in \mathfrak{P}(E) \mid \forall\, A \in \mathfrak{U}(E, \mu):\ A \cap X \in \mathfrak{U}(E, \mu)\}.$$

Osservazione 5. Notoriamente $\mathfrak{U}^{(l)}(E, \mu)$ è una *σ-algebra* di parti di E.

PROP. 6. *Risulta*

$$(4.3.4) \qquad \mathfrak{M}(E, \mu) = \mathfrak{U}^{(l)}(E, \mu).$$

Dim. Essendo $1_E \in \mathcal{M}_+(E, \mu)$, consegue dal coroll. 2 del § 1.

COROLL. 5. *Se f è un'arbitraria funzione reale definita in E, le seguenti due proprietà sono equivalenti:*

a) $f \in \mathcal{M}(E, \mu)$,

b) $\forall\, a \in \mathbf{R}:\ \{x \in E \mid a \leq f(x)\} \in \mathfrak{M}(E, \mu)$.

Dim. Essendo $1_E \in \mathcal{M}_+(E, \mu)$ consegue da (4.3.4) e dal coroll. 2 del § 1.

Ulteriormente, si denoti con $\mathfrak{A}^*(E, \mu)$ la *σ-algebra* delle parti di E misurabili rispetto alla misura esterna $\mu^{(e)}$ canonicamente associata a (def. 3), cioè (cfr. ad es. [14]: § 2, def. 2)

$$\mathfrak{A}^*(E, \mu) = \{X \in \mathfrak{P}(E) \mid \forall\ A \in \mathfrak{A}_{E,\mu}: \quad \mu^{(e)}(A) = \mu^{(e)}(A \cap X) + \mu^{(e)}(A - X)\}. \tag{4.3.5}$$

Sussiste la seguente

PROP 7. *Risulta*

$$\mathfrak{M}(E, \mu) = \mathfrak{A}^*(E, \mu). \tag{4.3.6}$$

Dim. Essendo $1_E \in \mathcal{M}_+(E, \mu)$, consegue dal coroll. 2 del § 1.

Un fondamentale criterio di misurabilità viene indicato nel successivo

TEOR. 2. *Se X è un'arbitraria parte di E, le seguenti due proprietà sono equivalenti :*

a) $\quad X \in \mathfrak{M}(E, \mu)$,

b) $\quad \forall\ K \in \mathfrak{P}(E)$, *$K$ compatto* : $K \cap X \in \mathfrak{A}(E, \mu)$.

Dim. *a)* $\Longrightarrow$ *b)*. Invero, se K è un arbitrario insieme compatto di E, risulta (coroll. 2) $K \in \mathfrak{A}(E, \mu)$ e, quindi, a causa di (4.3.3) e (4.3.4), essendo $X \in \mathfrak{M}(E, \mu)$ si ha $K \cap X \in \mathfrak{A}(E, \mu)$.

b) $\Longrightarrow$ *a)*. Sia $A \in \mathfrak{A}(E, \mu)$. A causa del coroll. 4 esiste, allora, una successione $(K_n)_{n \in \mathrm{N}}$ di insiemi compatti ed esiste $D \in \mathfrak{A}^{(0)}(E, \mu)$ tale che $D \subset A$ e

$$A - D = \bigcup_{n \in \mathrm{N}} K_n . \tag{4.3.7}$$

Ora, in forza di *b)*, per ogni $n \in \mathrm{N}$ risulta $K_n \cap X \in \mathfrak{A}(E, \mu)$ e poiché $K_n \cap X \subset A - D$ con $A - D \in \mathfrak{A}(E, \mu)$, da (4.3.7) consegue $(A - D) \cap X \in \mathfrak{A}(E, \mu)$ e anche $A \cap X \in \mathfrak{A}(E, \mu)$. Da quanto precede, tenuto conto dell'arbitrarietà di A nonché di (4.3.3) e (4.3.4), consegue $X \in \mathfrak{M}(E, \mu)$.

Si ha, allora, che

COROLL. 6. *Una parte X di E è misurabile rispetto a μ* (def. 4) *se e soltanto se X è misurabile rispetto a μ nel senso di* N. BOURBAKI (cfr. [5]: Chap. IV, § 5).

Dim. Tenuto conto di (4.1.2), consegue dal teorema precedente e dalla prop. 3 del § 5 del Chap. IV di [5].

Sussiste l'ulteriore

COROLL. 7. *Una funzione reale f definita in E è misurabile rispetto a μ* (§ 3: def. 2) *se e soltanto se f è misurabile rispetto a μ nel senso di* N. BOURBAKI (cfr. [5]: Chap. IV, § 5).

Dim. Tenuto conto del coroll. 6, consegue dalla prop. 6 del § 5 del Chap. IV di [5].

Osservazione 6. Il risultato precedente, t enuto conto di (3.4.1) (3.4.3) e del lem. 2 del § 3, permette di riconoscere per altra via il coroll. 5 del medesimo § 3 non appena si tenga presente il théor. 5 del § 5 del Chap. IV di [5].

4. Ulteriori caratterizzazioni della misurabilità vengono indicate nel successivo teor. 3 al quale premettiamo un risultato di carattere generale:

PROP. 7. *Sia E un insieme arbitrario e sia $\mathcal{L}$ uno spazio di Riesz-Lebesgue di funzioni reali definite in E* (cfr. [10]: § 1, def. 5) *verificante la proprietà di Stone*

$$f \in \mathcal{L} \Longrightarrow \inf(1_E, f) \in \mathcal{L}. \tag{4.4.1}$$

Allora, se $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$ è il δ-anello associato a $\mathcal{L}$ (cfr. [10]: § 2, def. 1 e prop. 2), *se $\mathcal{S}(\mathcal{L})$ è lo spazio di Riesz delle funzioni misurabili secondo Stone rispetto a $\mathcal{L}$* (cfr. [10]: § 3, def. 1) *e se $\mathfrak{A}_{\mathcal{S}(\mathcal{L})}$ è il σ-anello associato a $\mathcal{S}(\mathcal{L})$* (cfr. [10]: § 2, prop. 3), *per una arbitraria funzione reale f definita in E le seguenti tre poprietà sono equivalenti*:

a) $f \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$,

b) $\forall\, X \in \mathfrak{A}_{\mathcal{L}} \exists\, (g_n)_{n \in \mathrm{N}}$ *successione di funzioni semplici rispetto ad* $\mathfrak{A}_{\mathcal{S}(\mathcal{L})} \ni' \forall\, x \in X : \lim\limits_{n \to \infty} g_n(x) = f(x)$,

$c)$ $\qquad \forall X \in \mathfrak{U}_{\mathcal{L}} : \varphi_X \cdot f \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$.

Dim. $a) \Longrightarrow b)$. E' ovvia conseguenza della prop. 3 del § 2 di [14] in quanto da (4.4.1) consegue l'ulteriore condizione

$$f \in \mathcal{S}(\mathcal{L}) \Longrightarrow \inf (1_E, f) \in \mathcal{S}(\mathcal{L}).$$

$b) \Longrightarrow c)$. Sia $X \in \mathfrak{U}_{\mathcal{L}}$ e sia $(g_n)_{n \in \mathrm{N}}$ quella prevista in $b)$. Risulta $\varphi_X \in \mathcal{L}$ e, quindi, $\varphi_X \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$. Pertanto, a causa di (4.4.1), per ogni $n \in \mathrm{N}$ si ha $\varphi_X \cdot g_n \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$ (cfr. ad es. [10]: § 3, prop. 5) e, quindi, essendo

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_X \cdot g_n = \varphi_X \cdot f,$$

risulta $\varphi_X \cdot f \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$.

$c) \Longrightarrow a)$. Si supponga, dapprima, $0_E \leq f$. Sia $X \in \mathfrak{U}_{\mathcal{L}}$ e sia $a \in \mathrm{R}$, $0 \leq a$. Essendo $\inf (a \cdot \varphi_X, f) = \inf (a \cdot \varphi_X, \varphi_X \cdot f)$, poiché a causa di $c)$ è $\varphi_X \cdot f \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$, risulta $\inf (a \cdot \varphi_X, f) \in \mathcal{L}$. Pertanto, si ha che

$$a \in \mathrm{R},\ 0 \leq a,\ X \in \mathfrak{U}_{\mathcal{L}} \Longrightarrow \inf (a \cdot \varphi_X, f) \in \mathcal{L} \tag{4.4.2}$$

Sia, ora, φ un'arbitraria funzione positiva semplice rispetto ad $\mathfrak{U}_{\mathcal{L}}$. Esiste, allora, una famiglia finita $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ di elementi di $\mathfrak{U}_{\mathcal{L}}$ a due a due disgiunti ed esiste una famiglia (finita) $(a_\lambda)_{\lambda \in L}$ di numeri reali positivi tale che $\varphi = \sum_{\lambda \in L} a_\lambda \cdot \varphi_{X_\lambda}$. Da qui, tenuto conto di (4.4.2) ed essendo

$$\inf (\varphi, f) = \sum_{\lambda \in L} \inf (a_\lambda \cdot \varphi_{X_\lambda}, f),$$

consegue $\inf (\varphi, f) \in \mathcal{L}$. Dopo ciò, essendo un arbitrario elemento positivo di $\mathcal{L}$ limite di una successione monotona crescente di funzioni positive semplici rispetto ad $\mathfrak{U}_{\mathcal{L}}$ (cfr. [14]: § 2, prop. 3), si ha che

$$\varphi \in \mathcal{L},\ 0_E \leq \varphi \Longrightarrow \inf (\varphi, f) \in \mathcal{L}.$$

Pertanto $f \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$. Da quanto precede si passa al caso generale tenendo conto delle identità $\varphi_X \cdot f^+ = (\varphi_X \cdot f)^+$ e $\varphi_X \cdot f^- = (\varphi_X \cdot f)^-$.

Dopo ciò, siano E e μ quelli dei n. precedenti. Sussiste il seguente

TEOR 3. *Se f è un'arbitraria funzione reale definita in E, le seguenti proprietà sono equivalenti* :

a) $f \in \mathcal{M}(E, \mu)$,

b) $\forall K \in \mathfrak{P}(E)$, K *compatto* : $\varphi_X \cdot f \in \mathcal{M}(E, \mu)$,

c) $\forall X \in \mathfrak{U}(E, \mu) : \varphi_X \cdot f \in \mathcal{M}(E, \mu)$,

d) $\forall X \in \mathfrak{U}(E, \mu) \ \exists\, D \in \mathfrak{U}^{(0)}(E, \mu) \ \exists\, (g_n)_{n \in \mathrm{N}}$ *succesione di funzioni semplici rispetto a* $\mathfrak{M}(E, \mu) \ni' D \subset X$, $\forall x \in X - D$: $\lim\limits_{n \to \infty} g_n(x) = f(x)$,

e) $\forall K \in \mathfrak{P}(E)$, K *compatto* $\exists\, D \in \mathfrak{U}^{(0)}(E, \mu) \ \exists\, (g_n)_{n \in \mathrm{N}}$ *successione di funzioni semplici rispetto a* $\mathfrak{M}(E, \mu) \ni' D \subset K$, $\forall x \in K - D$: $\lim\limits_{n \to \infty} g_n(x) = f(x)$.

Dim. Tenuto conto del coroll. 1 del § 3 e della proposizione precedente, basta provare che $b) \Longrightarrow c)$ e $e) \Longrightarrow b)$ in quanto $c) \Longrightarrow b)$ e $d) \Longrightarrow e)$ sono ovvie.

Proviamo che $b) \Longrightarrow c)$. Sia $X \in \mathfrak{U}(E, \mu)$. Esiste, allora (coroll. 4), un insieme $A \subset X$ ed una successione $(K_n)_{n \in \mathrm{N}}$ di insiemi compatti tali che $X - A \in \mathfrak{U}^{(0)}(E, \mu)$ e

$$A = \bigcup_{n \in \mathrm{N}} K_n$$

A causa di $b)$, per ogni $n \in \mathrm{N}$ risulta $\varphi_{K_n} \cdot f \in \mathcal{M}(E, \mu)$. Pertanto, essendo $\varphi_X \cdot f = \varphi_{X-A} \cdot f + \sup\limits_{n \in \mathrm{N}} (\varphi_{K_n} \cdot f)$, si ha $\varphi_X \cdot f \in \mathcal{M}(E, \mu)$.

Proviamo che $e) \Longrightarrow b)$. Sia K un insieme compatto e siano D e $(g_n)_{n \in \mathrm{N}}$ quelli previsti in $e)$. Risulta $K - D \in \mathfrak{U}(E, \mu)$. Pertanto, per ogni $n \in \mathrm{N}$ si ha $\varphi_{K-D} \cdot g_n \in \mathcal{M}(E, \mu)$ e, quindi, essendo $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_{K-D} \cdot g_n = \varphi_{K-D} \cdot f$, risulta $\varphi_{K-D} \cdot f \in \mathcal{M}(E, \mu)$ e, quindi, $\varphi_K \cdot f \in \mathcal{M}(E, \mu)$.

Osservazione 1. Dal teorema precedente, tenuto conto del théor. 3 del § 5 del Chap. IV. ci [5] e del coroll. 6, consegue per altra via il risultato del coroll. 7.

BIBLIOGRAFIA

[1] AQUARO, G.: *Alcuni aspetti della teoria dell'integrale di Daniell-Stone.* « Conferenze del Seminario di Matematica dell'Università di Bari » (1965) (in corso di stampa).

[2] BOURBAKI, N.: *Topologie Générale,* Chap. I et II, Hermann, Paris (1961).

[3] BOURBAKI, N.: *Topologie Générale,* Chap. III et IV, Hermann, Paris, (1960).

[4] BOURBAKI, N.: *Topologie Générale,* Chap. X, Hermann, Paris (1961).

[5] BOURBAKI, N.: *Intégration,* Chap. I, II, III et IV, Hermann, Paris (1965).

[6] CAFIERO, F.: *Misura e integrazione.* « Monografie Matematiche », Cremonese, Roma (1959).

[7] CAIROLI, R.: *Fonctions d'ensemble et Intégration,* 1, C. M. H., vol. 39 (1963).

[8] DINCULEANU, N.: *Vector Measures,* Veb. Deut. Ver. der Wiss., Berlin (1967).

[9] HALMOS, P. R.: *Measure theory,* Van Nostrand, New York (1954).

[10] PUGLISI, M. A.: *Misurabilità secondo M. H. Stone per funzioni reali ecc.,* « Le Matematiche », vol. XXI, fasc. 1, pp. 30-65 (1966).

[11] PUGLISI, M. A.: *Sopra una caratterizzazione delle funzioni misurabili secondo M. H. Stone, ecc.,* « Le Matematiche », vol. XXIV, fasc. 1, pp. 17-27 (1969).

[12] PUGLISI, M. A.: *Seminorme di Beppo Levi ed integrali di Daniell ecc.,* « Ricerche di Matematica », vol. XVIII, fasc. 1, pp. 181-214 (1969).

[13] PUGLISI, M. A.: *Spazi seminormati di funzioni reali ecc.,* « Le Matematiche », vol. XXIV, fasc. 1, pp. 270-302 (1969).

[14] PUGLISI, M. A.: *Seminorme di Beppo Levi e misure esterne ecc.,* « Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste », vol. II, fasc. 2, pp. 85-105 (1970).

[15] STONE, M. H.: *Notes on Integration,* I-III, Proc. Nat. Ac. Science, U. S. A., vol. 34 (1948).