CONSIDERAZIONI CRITICHE E PRINCIPALI TEOREMI SULLA ESTENSIONE AD ANELLI NON COMMUTATIVI DELLA NOZIONE DI ELEMENTO INTEGRALE (*)

di WALTER SPANGHER (a Trieste) (**)

SOMMARIO. — *Si estende ad anelli non commutativi la nozione di elemento integrale, e si fa vedere il perché, in una siffatta estensione, alcuni classici teoremi vengano a cadere, ed il come i teoremi stessi possano essere eventualmente modificati.*

SUMMARY. — *We extend the notion of integral element to non-commutative rings and make clear the reason why in such extension some classical theorems break down and how the same theorems can eventually be modified.*

Premesse.

In alcune questioni di geometria algebrica sopra corpi arbitrari può apparire opportuno estendere ad anelli non commutativi la classica nozione di elemento integrale su un anello commutativo e, di conseguenza, determinare le condizioni più ampie sotto le quali si possa, eventualmente, garantire, anche nel caso non commutativo, la validità di alcuni noti fondamentali teoremi relativi alla commutativa integralità, quali, ad es., quelli della « chiusura integrale », della «transitività della dipendenza integrale », e più ancora quello di Cohen-Seidenberg, comprendente, tra l'altro, le due proprietà del « lying-over » e del « going-up ».

(*) Pervenuto in Redazione il 18 dicembre 1969.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei Contratti di Ricerca matematica del C. N. R.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università — Piazzale Europa 1 — 34100 Trieste.

In questo lavoro si affrontano i problemi or ora adombrati e, per quanto possibile, si risolvono, avendo cura di mettere altresí in luce il come ed il perché certe proprietà integrali notevoli, valide nel caso commutativo, vengano a cadere nella loro essenza appena sia abbondonata l'ipotesi della commutatività.

Più precisamente, nel n. 1 del cap. I, dopo aver ricordato la definizione di elemento integrale di un anello commutativo B su un suo sottoanello A, si dimostrano alcuni noti teoremi — tra i quali quelli della « chiusura integrale » e della « transitività della dipendenza integrale » — nell'accezione più ampia che B sia una A-algebra (non necessariamente commutativa). Nel n. 2 si introduce la nozione di elemento integrale sinistro (destro) di un anello non commutativo B su un suo sottoanello A, e si fa vedere, con alcuni esempi relativi al corpo dei quaternioni e all'anello delle matrici quadrate del secondo ordine, come non si possano canonicamente estendere al caso non commutativo i già citati teoremi della « chiusura integrale » e della « transitività della dipendenza integrale ». Nel n. 3 si tratta del derivato di un anello e di certe proprietà degli elementi integrali ad esso collegate, mentre nel n. 4 si dà una caratterizzazione degli elementi integrali su anelli non commutativi. Infine, nel n. 5, dopo alcune premesse di carattere critico-esistenziale, si determinano alcune proprietà degli elementi integrali su anelli noetheriani sinistri (destri), con particolare riguardo, anche qui, ai teoremi della « chiusura integrale » e della « transitività della dipendenza integrale ».

Il cap. II appare invece totalmente dedicato al teorema di Cohen-Seidenberg, del quale, nel n. 1, si ricorda la dimostrazione relativa al caso commutativo, esplicitamente indicando le due proprietà del « lying-over » e del « going-up ». Dopo aver dato, nel n. 2, alcune necessarie nozioni sugli ideali primi e fortemente primi, si affronta, nel n. 3, lo stesso teorema di Cohen-Seidenberg, nel caso però non commutativo. Il successivo n. 4 è dedicato ad alcuni risultati di algebra locale non commutativa, mentre nel n. 5 si ritorna all'estensione del teorema di Cohen-Seidenberg al caso non commutativo, seguendo però, il metodo di Krull. Il lavoro si chiude con il n. 6, nel quale si dimostra il teorema del « going-up », riferito ad algebre finite.

Si può ancora far notare che, nel corso del cap. II, vengono ottenuti alcuni risultati relativi alla dimensione di un anello secondo Krull.

OSSERVAZIONE. In tutto il seguito gli anelli che si andranno via via a considerare saranno supposti — anche se ciò non verrà esplicitamente indicato (e salvo contrario avviso) — dotati di elemento unità; inoltre i considerati sottoanelli o sopraanelli di un dato anello avranno sempre lo stesso elemento unità dell'anello. Si supporrà poi che gli omomorfismi tra due anelli siano non banali, cioè mutino l'elemento unità dell'uno in quello dell'altro.

CAPITOLO I

1. Elementi integrali su anelli commutativi.

Sia A un anello commutativo e B un sopraanello di A, pur esso commutativo.

Secondo una definizione ormai classica (1), un elemento x di B dicesi *integrale* (o *intero*) su A se esiste un insieme finito $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ di elementi di A tali che:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0. \tag{1}$$

La (1) viene detta un'*equazione di dipendenza integrale* di x su A. Se B' è un sottoinsieme di B i cui elementi sono tutti integrali su A si dice che l'insieme B' è *integrale* su A.

La totalità degli elementi di B che sono integrali su A si dice poi *chiusura integrale* di A in B.

La data definizione di elemento o di insieme integrale su A e quella di chiusura integrale di A in B possono chiaramente rimaner valide anche nell'ipotesi più ampia in cui, sempre restando A un anello commutativo, B divenga una A-algebra (2), non necessariamente commutativa; ed è appunto in tale ipotesi che in questo n. ci proponiamo di dimostrare alcuni teoremi (3).

(1) Vedi, ad es., [8], pag. 254.

(2) Le algebre da noi considerate sono sempre associative ed unitarie.

(3) Le dimostrazioni di questi teoremi ricalcano, nelle loro linee essenziali, quelle già note relative al caso in cui B sia un sopraanello commutativo di A (ved., ad es., [8], pagg. 254-268). Si vedrà invece nei seguenti nn. come le considerazioni qui svolte debbano venire totalmente mutate quando si lasci cadere l'ipotesi della commutatività di A (e B divenga un sopraanello di A).

TEOREMA I: *Sia A un anello commutativo e B una A-algebra. Condizione necessaria e sufficiente perché un elemento x di B sia integrale su A è che verifichi una delle seguenti tre condizioni tra loro equivalenti:*

a) *La sottoalgebra $A[x]$ di B è un A-modulo di tipo finito.*

b) *La sottoalgebra $A[x]$ di B è contenuta in una sottoalgebra B' di B che sia un A-modulo di tipo finito.*

c) *Esiste un $A[x]$-modulo fedele M (4) che sia A-modulo di tipo finito.*

DIMOSTRAZIONE (di carattere ciclico): Dall'ipotesi che x sia integrale su A, cioè che valga un'equazione del tipo (1), discende la a) in quanto la sottoalgebra $A[x]$, pensata come A-modulo, è generata da $1, x, \dots, x^{n-1}$.

Dalla a) discende poi la b) in quanto si può prendere come sottoalgebra B' di B la $A[x]$ stessa.

Dalla b) deriva invece la c) potendosi assumere, come $A[x]$-modulo fedele M, la sottoalgebra B' di B, essendo la fedeltà di M su $A[x]$ assicurata dall'esistenza dell'unità in $A[x]$.

Supposta infine valida la c) sia $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ un sistema di generatori dell'A-modulo M. Poiché tale M è anche un $A[x]$-modulo si ha:

$$xp_j = \sum_1^n{}_i\, a_{ji}\, p_i\,, \qquad (a_{ji} \in A\,;\ j = 1, 2, \dots, n),$$

cioè, usando i simboli di Kronecker δ_{ji}:

$$\sum_1^n{}_i\, (\delta_{ji}\, x - a_{ji})\, p_i = 0, \qquad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Detto C_{ji} il complemento algebrico dell'elemento $c_{ji} = \delta_{ji}\, x - a_{ji}$ nella matrice quadrata $\| c_{ji} \|$ — il cui determinante si indicherà con D — dalle precedenti relazioni, ed avuto riguardo alle note regole di Laplace sui determinanti, si ottiene:

$$\sum_1^n{}_j\, C_{jk} \sum_1^n{}_i\, c_{ji}\, p_i = \sum_1^n{}_i \left(\sum_1^n{}_j\, C_{jk}\, c_{ji} \right) p_i = \sum_1^n{}_i\, \delta_{ki}\, D p_i = 0, \qquad (k = 1, 2, \dots, n),$$

(4) Un A-modulo M dicesi *fedele* se il suo annullatore si riduce allo zero, cioè se $(0 : M) = 0$.

donde:

$$Dp_k = 0, \qquad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Poiché $D = | \delta_{ji} x - a_{ji} |$ appartiene ad $A[x]$ ed è un annullatore di M, per la fedeltà di M su $A[x]$ si ha $D = 0$, quest'ultima risultando un'equazione di dipendenza integrale di x su A.

TEOREMA II: *Sia A un anello commutativo e B una A-algebra. Se $n\,(\geq 1)$ elementi $x_1, x_2, \dots, x_n$ di B sono integrali su A e tra loro permutabili, la sottoalgebra $A[x_1, x_2, \dots, x_n]$ di B è un A-modulo di tipo finito.*

DIMOSTRAZIONE: La proposizione — a norma del teorema I, a) — è vera per $n = 1$. Procedendo per induzione rispetto ad n, supponiamo allora che $A' = A[x_1, x_2 \dots, x_{n-1}]$ sia un A-modulo di tipo finito. L'elemento x_n, essendo integrale su A, è pure integrale su A' (inteso come anello, necessariamente commutativo, per la commutatività di A e la permutabilità degli x_i) e perciò $A'[x_n] = A[x_1, x_2, \dots, x_n]$ è un A' — modulo di tipo finito, e quindi pure un A-modulo di tipo finito.

TEOREMA III (della chiusura integrale): *Sia A un anello commutativo e B una A-algebra. Se gli elementi della chiusura integrale di A in B sono tra loro permutabili, essi formano una sottoalgebra di B, che contiene ovviamente A.*

DIMOSTRAZIONE: Siano x ed y due elementi di B integrali su A. Come conseguenza del teor. II, la sottoalgebra $A[x, y]$ è un A-modulo di tipo finito, e quindi per il teor. I, b) gli elementi $x - y$ ed xy sono integrali su A.

TEOREMA IV (della transitività della dipendenza integrale): *Sia A un anello commutativo, B una A-algebra commutativa e C una B-algebra. Se B è integrale su A, ogni elemento di C che sia integrale su B è pure integrale su A.*

DIMOSTRAZIONE: Sia y un elemento di C integrale su B e

$$y^n + b_1 y^{n-1} + \dots + b_n = 0, \qquad (b_i \in B\,;\ i = 1, 2, \dots, n),$$

una sua equazione di dipendenza integrale su B. Come conseguenza del teor. II, la sottoalgebra $A' = A[b_1, \dots, b_n]$ di B è un A-modulo di tipo finito. Ma anche la sottoalgebra $A'[y]$ è un A-modulo di tipo finito, essendo $A'[y]$ un A'-modulo di tipo finito in quanto y è integrale su A'. Per il teor. I, b) l'elemento y risulta allora *integrale* su A.

2. Elementi integrali su anelli non commutativi.

Qui estenderemo la nozione di elemento integrale, data all'inizio del n. 1, al caso in cui A (e quindi B) sia un anello non commutativo.

Sia dunque A un anello non commutativo e B un sopraanello di A.

Diremo che un elemento x di B è *integrale* (o *intero*) *sinistro* su A se esiste un insieme finito $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ di elementi di A tale che:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0. \tag{2}$$

Diremo invece che x è *integrale* (o *intero*) *destro* su A se al posto della (2) vale una relazione del tipo:

$$x^n + x^{n-1} a_1 + \dots + a_n = 0 \text{ (5)}. \tag{2'}$$

Le (2) e (2') verranno dette, rispettivamente, un'*equazione di dipendenza integrale sinistra* ed un'*equazione di dipendenza integrale destra* di x su A.

Se B' è un sottoinsieme di B i cui elementi siano tutti integrali sinistri (destri) su A, si dirà che l'insieme B' è *integrale sinistro* (*destro*) su A.

La totalità degli elementi di B che sono integrali sinistri (destri) su A si dirà poi *chiusura integrale sinistra* (*destra*) di A in B.

Un elemento x di B che sia tanto integrale sinistro, quanto integrale destro su A — il che accade necessariamente se A è contenuto nel centro di B — si dirà semplicemente *integrale* su A.

Il problema che primo si presenta nella considerazione di elementi integrali su anelli non commutativi è di vedere se, in tale caso, possono ancora valere teoremi analoghi a quelli del n. 1

(5) Gli elementi di B integrali destri su A sono gli elementi dell'anello opposto di B che sono integrali sinistri sull'anello opposto di A.

(dove però la struttura di algebra sopra un anello venga sostituita da quella di sopraanello dell'anello stesso).

Un'opportuna formulazione del teor. I verrà data nel n. 4. Per quanto riguarda invece il teor. II è immediato constatare ch'esso non potrà certo sussistere se non varranno teoremi analoghi a quelli III e IV della «chiusura integrale» e della «transitività della dipendenza integrale».

In relazione, infine, ai due teoremi ultimi indicati si potrebbe pensare che, anche nel caso che B sia un anello non commutativo, la chiusura integrale sinistra (destra) di A in B sia un sottoanello di B; ed inoltre che possa continuare ad essere valido un teorema di transitività della dipendenza integrale. Ciò invece non accade neppure nel caso particolare che A, sia contenuto nel centro di B (ed allora gli elementi integrali sinistri sono anche integrali destri) come viene provato dai due seguenti esempi [6]:

a) Sia B il corpo (non commutativo) dei quaternioni sul campo dei reali ed A l'anello degli interi relativi (ovviamente contenuto, a meno di un isomorfismo, nel centro di B).

Se $f(X)$ è un polinomio con coefficienti nel centro di B ed $f(\alpha) = 0$ per un elemento α di B, è noto che si ha pure $f(s\alpha s^{-1}) = 0$ per ogni s non nullo di B.

Partendo dall'equazione: $X^2 + 1 = 0$ si possono allora trovare le soluzioni

$$x = (0, -{}^6/_7, {}^2/_7, {}^3/_7), \qquad y = (0, -{}^6/_7, -{}^2/_7, -{}^3/_7).$$

I due elementi x ed y di B sono integrali su A, ma non così $x + y$, xy ed yx, come si può facilmente verificare. Tanto basta per concludere che la chiusura integrale di A in B non è in questo caso un anello.

Questo esempio può apparire interessante poiché ci mostra come la eventuale regolarità di elementi, o addirittura la loro invertibilità, non ha alcuna relazione con la validità o meno, dei teore-

(6) Si osservi che per provare, nel caso non commutativo, la non validità dei teoremi della chiusura integrale e della transitività della dipendenza integrale basta determinare due elementi x, y di B integrali su A, ma tali che uno almeno dei tre elementi $x + y$, xy, yx, non sia integrale su A.

Si osservi inoltre che, se A è contenuto nel centro di B, B è dotato canonicamente della struttura di A-algebra; essendo valido, in queste ipotesi, il teorema II del n. 1 gli elementi x, y che dobbiamo determinare devono essere non fra loro permutabili, cioè tali che: $xy \neq yx$.

mi della chiusura integrale e della transitività della dipendenza integrale nel passaggio da anelli commutativi ad anelli non commutativi.

b) Sia B l'anello (non commutativo) delle matrici quadrate del secondo ordine con elementi nel corpo Q dei numeri razionali, ed A l'anello degli interi relativi (contenuto, a meno di un isomorfismo, nel centro di B).

È noto che un elemento x di B è integrale su A se, e solo se, i coefficienti dell'equazione caratteristica di x sono integrali su A. Ciò è come dire che $x = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$, $(a, b, c, d \in Q)$, è integrale su A se, e solo se, $a + d \in A$, $ad - bc \in A$ (tenuto anche conto, che un anello a fattorizzazione unica è integralmente chiuso [7] nel suo corpo dei quozienti).

Da quanto procede discende facilmente che i due elementi

$$x = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \quad , \quad y = \begin{Vmatrix} 0 & 4 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{Vmatrix}$$

sono integrali su A e non fra loro permutabili, ma $x + y$, xy ed yx non sono integrali su A.

È bene altresì qui precisare che la permutabilità fra gli elementi integrali non è necessaria perché sussistano i teoremi della chiusura integrale e della transitività della dipendenza integrale. Infatti, sempre con riferimento all'esempio in questione, gli elementi $x = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$ ed $y = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$ sono integrali su A e non fra loro permutabili, mentre $x + y$, xy ed yx sono integrali su A poichè i coefficienti delle loro equazioni caratteristiche sono interi.

3. Derivato di un anello e proprietà collegate di elementi integrali.

Introduciamo dapprima il concetto di *derivato* in un anello. Sia, all'uopo, R un anello (non necessariamente commutativo, né

[7] Un anello A dicesi *integralmente chiuso* in un suo sopraanello B se la chiusura integrale di A in B coincide con A.

provvisto di elemento unità). L'ideale bilatero $\mathcal{D}$ generato dalla totalità degli elementi del tipo $xy - yx$, al variare di x ed y in R, dicesi *derivato* di R.

L'elemento generico di $\mathcal{D}$ è del tipo [8]:

$$\sum_{x,y\in R} (xy - yx) + \sum_{x,y\in R} R(xy - yx) +$$

$$+ \sum_{x,y\in R} (xy - yx) R + \sum_{x,y\in R} R(xy - yx) R,$$

oppure, quando R possiede l'elemento unità, del tipo:

$$\sum_{x,y\in R} R(xy - yx) R.$$

Valgono le seguenti due proposizioni:

a) *Ogni ideale bilatero $\mathcal{M}$ di R che contiene $\mathcal{D}$ è tale che $R/\mathcal{M}$ risulti un anello commutativo; e viceversa.*

b) *Ogni ideale sinistro (destro) α di R che contenga $\mathcal{D}$ è bilatero.*

Per dimostrare la a) basta osservare che se λ è l'omomorfismo canonico di R su $R/\mathcal{M}$ da $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{D}$ segue $\lambda(xy - yx) = 0$, donde $\lambda(x)\cdot\lambda(y) = \lambda(y)\cdot\lambda(x)$ per ogni elemento (x, y) di R^2. Il viceversa è banale.

Per quanto riguarda la b) basta ricordare, con riferimento all'omomorfismo canonico $\varphi : R \longrightarrow R/\mathcal{D}$, che esiste una corrispondenza biunivoca fra gli ideali sinistri (destri, bilateri) di $R/\mathcal{D}$ e quelli sinistri (destri, bilateri) di R che contengono $\mathcal{D}$. Essendo, in virtù di a), $R/\mathcal{D}$ commutativo, tutti i suoi ideali sono bilateri, e quindi sono bilateri quelli di R che contengono $\mathcal{D}$.

Sia ora R un anello con unità ed A un suo sottoanello proprio avente la stessa unità di R. Si supponga inoltre che il derivato $\mathcal{D}$ di R sia contenuto in A [9].

Sia poi x un elemento di R integrale sinistro su A e:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \qquad (a_i \in A\ ;\ i = 1, 2, \dots, n) \tag{3}$$

una sua equazione di dipendenza integrale sinistra su A. Applicando ad ambo i membri della (3) l'omomorfismo canonico $\varphi : R \longrightarrow R/\mathcal{D}$

[8] Anche in seguito useremo scritture simboliche di questo tipo, dove le sommatorie, ovviamente, sono finite.

[9] Sotto le ipotesi da noi fatte si ha chiaramente $\mathcal{D} \subsetneqq A$: se infatti risultasse $\mathcal{D} = A$, si avrebbe $1 \in \mathcal{D}$, donde $\mathcal{D} = R$, e pertanto $A = R$.

si ottiene:

$$\varphi(x)^n + \varphi(a_1)\varphi(x)^{n-1} + \ldots + \varphi(a_n) = 0, \tag{4}$$

e perciò $\varphi(x)$ è integrale su $\varphi(A) \simeq A/\mathcal{D}$.

Viceversa se $\varphi(x)$ è integrale su $\varphi(A)$ e, ad esempio, la (4) è una sua equazione di dipendenza integrale, allora ogni $y \in \varphi^{-1}(\varphi(x))$ è integrale sia destro che sinistro su A. Infatti se vale la (4) per la commutatività dell'anello $R/\mathcal{D}$ vale anche la:

$$\varphi(x)^n + \varphi(x)^{n-1}\varphi(a_1) + \ldots + \varphi(a_n) = 0. \tag{4'}$$

Dalla (4) e (4′) discende che, per ogni $y \in \varphi^{-1}(\varphi(x))$ e $b_i \in \varphi^{-1}(\varphi(a_i))$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, risulta:

$$y^n + b_1 y^{n-1} + \ldots + b_n = r, \quad y^n + y^{n-1} b_1 + \ldots + b_n = s, \quad (r, s \in \mathcal{D}),$$

cioè

$$y^n + b_1 y^{n-1} + \ldots + (b_n - r) = 0, \quad y^n + y^{n-1} b_1 + \ldots + (b_n - s) = 0.$$

Da quanto precede — ed appena nelle due ultime equazioni si ponga $y = x$ — ne viene altresì che se un elemento x di R è integrale sinistro (destro) su A, esso è pure integrale destro (sinistro) su A stesso.

Sia $\bar{A}$ la chiusura integrale di $\varphi(A)$ in $R/\mathcal{D}$. Essendo $R/\mathcal{D}$ un anello commutativo, $\bar{A}$ risulta essere un suo sottoanello [10] e quindi, per quanto sopra visto, l'anello $\varphi^{-1}(\bar{A})$ è la chiusura integrale di A in R (sia sinistra che destra).

Siano infine A, B, C sottoanelli di R, con $A \subseteq B \subseteq C$, e sia C integrale sinistro su B e B integrale sinistro su A. Sempre nell'ipotesi $\mathcal{D} \subseteq A$ si ha che $\varphi(C)$ è integrale su $\varphi(B)$ e $\varphi(B)$ è integrale su $\varphi(A)$, da cui — essendo $R/\mathcal{D}$ commutativo, ed avuto riguardo al teorema di transitività della dipendenza integrale (n. 1) — discende che $\varphi(C)$ è integrale su $\varphi(A)$ e quindi $\varphi^{-1}(\varphi(C)) = C$ è integrale sinistro (ma anche destro) su $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$.

Osservazione: Affinché i due anelli R ed A $(A \subseteq R)$ si trovino nella situazione $\mathcal{D} \subseteq A$ è necessario (ma non sufficiente) che non

[10] In realtà per giungere a questa conclusione sarebbe sufficiente che gli elementi integrali su $\varphi(A)$ fossero fra loro permutabili.

esista alcun corpo o anello quasi semplice *non* commutativo K con $A \subseteq K \subseteq R$. L'anello A non deve altresì contenere alcun corpo o anello quasi semplice *non* commutativo.

Si può generalizzare il procedimento ora esposto nella seguente maniera. Sempre con le solite notazioni, può succedere che $\mathcal{D} \not\subseteq A$. Allora se $\bar{A}$ è la chiusura integrale di $\varphi(A) \simeq A/A \cap \mathcal{D}$ in $R/\mathcal{D}$, si ha che $\varphi^{-1}(\bar{A})$ è la chiusura integrale di $A[\mathcal{D}]$ in R (in $\varphi^{-1}(\bar{A})$ possono trovarsi anche elementi che non sono integrali su A). Considerato il derivato $\mathcal{D}'$ di $\varphi^{-1}(\bar{A})$ (si ha ovviamente $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$) e l'omomorfismo canonico $\varphi_1 : \varphi^{-1}(\bar{A}) \to \varphi^{-1}(\bar{A})/\mathcal{D}'$, ed introdotta con lo stesso procedimento prima messo in luce la chiusura integrale $\bar{\bar{A}}$ di $\varphi_1(A) \simeq$ $\simeq A/A \cap \mathcal{D}'$ in $\varphi^{-1}(\bar{A})/\mathcal{D}'$, si ha che $\varphi_1^{-1}(\bar{\bar{A}})$ è la chiusura integrale di $A[\mathcal{D}']$ in $\varphi^{-1}(\bar{A})$, anzi in R (in quanto in $R \dot{-} \varphi^{-1}(\bar{A})$ non cadono elementi integrali su A).

Così si può proseguire indefinitamente. Se però esiste un intero k tale che $\mathcal{D}^{(k)} \subseteq A$, allora non solo $\varphi_k^{-1}(\bar{A}^{k+1})$ è la chiusura integrale di A in R, ma continua anche a sussistere il teorema della transitività della dipendenza integrale.

4. Una caratterizzazione degli elementi integrali su anelli non commutativi.

In questo n. e nel successivo ci riferiremo, per semplicità di trattazione, solo a elementi integrali sinistri. Le considerazioni fatte ed i risultati ottenuti potranno però agevolmente tradursi al caso di elementi integrali destri.

Sia A un anello non commutativo e B un sopraanello di A. Se x è un elemento di B integrale sinistro su A indicheremo con $\partial_i x$ il grado minimo dell'equazioni di dipendenza integrale sinistra di x su A e con $\partial_a x$ il grado minimo delle equazioni algebriche sinistre di x su A.

Indicheremo poi con $A_s[x^N]$ il più piccolo A-modulo sinistro che contenga $\{1, x, \dots, x^n, \dots\}$ ovvero che contenga tutte le potenze positive o nulle di x. Vale il seguente:

TEOREMA I: *Condizione necessaria e sufficiente affinché un elemento x di B sia integrale sinistro su A è che l'A-modulo sinistro $A_s[x^N]$ sia di tipo finito.*

DIMOSTRAZIONE: Sia x ($x \in B$) integrale sinistro su A e

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0, \qquad (a_i \in A\,;\ i = 1, 2, \dots, n),$$

una sua equazione di dipendenza integrale sinistra su A. Un elemento generico $\Sigma\, a'_j x^j$ di $A_s[x^N]$ può scriversi (poggiando sulla precedente equazione di dipendenza integrale) nella forma:

$$\Sigma_j\, a'_j x^j = \sum_0^{n-1}{}_j\, a'_j x^j + \sum_{j \geq n} a'_j \left(\sum_0^{n-1}{}_k\, a''_{jk} x^k \right), \qquad (a'_j, a''_{jk} \in A),$$

e quindi $A_s[x^N]$ è generato da $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$.

Viceversa se $u_1, u_2, \dots, u_p$ formano un sistema di generatori di $A_s[x^N]$ con:

$$u_i = \sum_0^{n_i}{}_j\, a_{ji} x^j, \qquad (a_{ji} \in A\,;\ i = 1, 2, \dots, p),$$

posto $\bar{n} = \max\limits_{1 \leq i \leq p} n_i$, si ha che

$$x^{\bar{n}+1} = a_1 u_1 + \dots + a_p u_p = \sum_0^{\bar{n}}{}_j\, a'_{ji} x^j,$$

cioè che x è integrale sinistro su A con $\partial_i x \leq \bar{n} + 1$.

COROLLARIO: *Condizione necessaria e sufficiente affinché un elemento x di B sia integrale sinistro su A, con $\partial_a x = \partial_i x$, è che $\{1, x, \dots, x^{\partial_i x - 1}\}$ sia una base dell'A-modulo $A_s[x^N]$.*

Si faccia ora l'ipotesi che l'anello A sia noetheriano sinistro, il che comporta — a norma di un noto risultato di algebra noetheriana — che ogni A-modulo sinistro di tipo finito è noetheriano. In tale ipotesi vale il seguente:

TEOREMA II: *Se A è un anello noetheriano sinistro, condizione necessaria e sufficiente affinché un elemento x di B sia integrale sinistro su A è che esista un A-modulo sinistro di tipo finito che contenga $A_s[x^N]$.*

DIMOSTRAZIONE: Se infatti M è un A-modulo sinistro di tipo finito che contiene $A_s[x^N]$, si ha che M è un A-modulo noetheriano sinistro; ne viene che ogni suo sottomodulo è di tipo finito e quindi, in particolare, è di tipo finito anche $A_s[x^N]$.

5. Elementi integrali su anelli noetheriani.

Sia A un anello noetheriano sinistro (11) e B un suo sopraanello. Siano inoltre x, y due elementi di B integrali sinistri su A. Se in relazione agli anelli A, B sussiste il teorema della chiusura integrale, gli elementi $x + y$, xy, yx sono integrali sinistri su A, per il che è necessario e sufficiente che gli A-moduli sinistri $A_s[(x+y)^N]$, $A_s[(xy)^N]$, $A_s[(yx)^N]$ siano di tipo finito.

Consideriamo ora l'A-modulo sinistro $F = A_s[x^N, y^N]$ generato dal semigruppo libero (12) formato con le «lettere» x, y, compresa la parola vuota, cioè l'unità di A; sia cioè:

$$F = A_s[1, x, y, xy, yx, xx, yy, xyx, \dots].$$

Nel caso che B sia un anello commutativo si verifica immediatamente che F coincide con $A[x, y]$, cioè coincide con l'anello ottenuto ampliando A con x ed y; inoltre gli elementi $\dots x^i y^j x^h y^k \dots$ di F possono essere scritti nella forma: $\Sigma A x^{i'} y^{j'}$ con $0 \leq i' \leq \partial_i x - 1$ e $0 \leq j' \leq \partial_i y - 1$, in modo che F risulta essere un A-modulo di tipo finito, e quindi $x + y$ ed xy risultano integrali su A.

Noi ci proponiamo ora di trovare le cause ed i possibili rimedi al fatto che F, in generale, non è un A-modulo di tipo finito (come invece accade nel caso che B risulti commutativo)

Supponiamo dapprima (per semplificare il ragionamento e le notazioni) che A sia contenuto nel centro di B. In tal caso si verifica facilmente che F può essere dotato canonicamente della struttura di anello che però, in generale, non è un A-modulo di tipo finito. Infatti, pur potendo supporsi che nelle «parole» $\dots x^i y^j x^h y^k \dots$ si abbia $0 \leq i, h, \dots \leq \partial_i x - 1$ e $0 \leq j, k, \dots \leq \partial_i y - 1$, (e ciò valendosi delle equazioni di dipendenza integrale sinistra di x ed y), gli elementi necessari per la generazione di F possono ancora essere infiniti potendosi essi estendere «in lungo» ed «in alto» (quest'ultima possibilità di estensione essendo però vincolata dal fatto che le potenze di x ed y sono limitate superiormente da $\partial_i x - 1$ e $\partial_i y - 1$).

(11) In questo n. l'anello A viene supposto noetheriano sinistro poichè in tale ipotesi si può poggiare sul teor. II del n. 4. Si noti che se A non è noetheriano sinistro, il teorema in questione non sussiste, come è facile vedere con controesempi relativi anche al caso che A sia commutativo.

(12) Compatibilmente alle relazioni esistenti in B.

In conclusione, perché F risulti un A-modulo di tipo finito, e quindi $x+y$, xy ed yx siano integrali sinistri su A, bisogna richiedere l'esistenza di un numero naturale $p \geq 2$ tale che ogni « parola » in x, y possa ottenersi come combinazione lineare con coefficienti in A di « parole » in x, y, di lunghezza minore od uguale a p, ovvero: $\ldots x^i y^j x^h y^k \ldots = \Sigma A x^{i'} y^{j'} x^{h'} y^{k'} \ldots$, con $i' + j' + h' + k' + \ldots \leq p$ e viceversa.

Ciò è come dire che, affinché F risulti un A-modulo di tipo finito occorre e basta poter risolvere le seguenti tre operazioni:

a) *portare gli scalari a sinistra;*

b) *restringere* (13) *le estensioni « in lungo »;*

c) *restringere le estensioni « in alto »;* (quest'ultima operazione risultando sempre fattibile in quanto si dispone delle equazioni di dipendenza integrale sinistra di x ed y su A).

Le prime due operazioni a) e b) non si presentano o si risolvono da sé nel caso di anelli commutativi, mentre hanno un'importanza fondamentale nel caso di anelli non commutativi.

Diamo ora delle condizioni sugli anelli A e B che garantiscano la possibilità di risoluzione contemporanea di tutte e tre le operazioni a), b) e c) da compiersi sull'A-modulo F (14).

I) Supponiamo che tutti i commutatori di B stiano in A (condizione che è meno forte dell'inclusione del derivato $\mathcal{D}$ di B in A).

Avendosi, in tale caso:

$$x^h y^j - y^j x^h \in A\,; \quad x^i a - a x^i \in A, \quad y^j a - a y^j \in A, \quad (\text{per ogni } a \in A),$$

si ha pure:

$$x^i y^j x^h y^k = x^{i+h} y^{j+k} + x^i A y^k = x^{i+h} y^{j+k} + A x^i y^k + A y^k ,$$

e perciò, dopo un numero finito di siffatte operazioni è possibile raggruppare le potenze di x e quelle di y e portare gli scalari a

(13) Con la locuzione « restringere » s'intende poter scrivere una parola in x, y come combinazione lineare di « parole » di lunghezza minore.

(14) Ci si può rendere conto con numerosi esempi (ved. l'esempio dell'algebra delle matrici quadrate di ordine due sul corpo razionale Q e della ricerca dei suoi elementi integrali su Z) che F è un A-modulo di tipo finito per svariati motivi, fra loro collegati, che però derivano solo dal semplice fatto che $x+y$, xy ed yx sono integrali sinistri su A.

sinistra; ne consegue che gli elementi di F risultano del tipo $\Sigma A x^i y^j$. Poggiando ora sulle equazioni di dipendenza integrale sinistra di x ed y su A, e nuovamente sulle condizioni $x^i a - a x^i \in A$ per ogni a di A, si ottiene che tutti gli elementi di F possono porsi sotto la forma $\Sigma A x^i y^j$, con $0 \leq i \leq \partial_i x - 1$ e $0 \leq j \leq \partial_i y - 1$; donde si conclude che F è un A-modulo di tipo finito.

II) Sia B un anello tale che per ogni coppia di elementi b, b' di B si abbia:

(5) $$bb' = ab' b + a' \quad \text{per qualche } a \text{ ed } a' \text{ di } A.$$

Anche in questo caso, seguendo i procedimenti svolti in I), si può dimostrare che l'A-modulo F è di tipo finito, e vale altresì il teorema della chiusura integrale.

La condizione (5) è soddisfatta quando tutti i commutatori di B stanno in A, oppure quando l'anello B verifica la condizione di Lie ($bb' = -b'b$ per ogni coppia di elementi b, b' di B), oppure ancora quando il sottogruppo additivo T di B, generato dai quadrati degli elementi di B, è contenuto in A [15].

III) La condizione imposta in II) agli anelli A, B, perché F risulti un A-modulo di tipo finito, può essere modificata in modo da renderla meno forte, rimanendo però sempre valida la conclusione della finita generabilità di F.

Supponiamo, infatti, che A sia contenuto nel centro di B e che si abbia per gli elementi x ed y di $F = A_s[x^N, y^N]$:

$$xy = ayx + a', \quad yx = \bar{a}xy + \bar{a}', \quad (a, a' \bar{a}, \bar{a}' \in A).$$

Anche qui si può verificare, con lo stesso procedimento seguito in I), che F è un A-modulo di tipo finito.

Se ora S è un sottoinsieme di B tale che $A[S] = B$, e se per gli elementi di $A \cup S$ vale la condizione di cui in II), il modulo F risulta di tipo finito [16], in relazione ad ogni coppia di elementi x, y integrali su A.

Per quanto riguarda invece il teorema della transitività della dipendenza integrale possiamo ragionare nel seguente modo.

(15) Infatti si ha: $xy + yx = (x + y)^2 - x^2 - y^2$, cioè $xy = -yx + t$, con $t \in T \subseteq A$.

(16) È bene far notare che se S è un sistema di generatori di B, e se i commutatori di S stanno in A, non è detto a priori (con queste sole condizioni) che l'A-modulo F sia di tipo finito.

Sia A un anello noetheriano sinistro, B un sopraanello di A integrale sinistro su A e C un sopraanello di B integrale sinistro su B. Si indichi poi con x un elemento di C e sia:

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n = 0, \qquad (b_j \in B; j = 1, 2, \dots, n),$$

un'equazione di dipendenza integrale sinistra di x su B. Inoltre si ricordi che $\partial_i b_j = n_j$ sta ad indicare il grado minimo delle equazioni di dipendenza integrale sinistra di b_j su A.

Si consideri l'A-modulo sinistro $G = A_s[b_1^N, b_2^N, \dots, b_n^N]$, cioè il più piccolo A-modulo sinistro che contenga il semigruppo libero [17] generato dalle «lettere» $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Quando B è un anello commutativo, G può essere dotato canonicamente della struttura di anello ed è un A-modulo di tipo finito, potendo essere generato dagli elementi del tipo:

$$b_1^{i_1} b_2^{i_2} \dots b_n^{i_n}, \qquad \text{con } 0 \leq i_k \leq n_k - 1, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Andiamo ora a vedere cosa accade quando non sussiste la proprietà commutativa in B. Tanto per semplificare il ragionamento, supponiamo che A sia contenuto nel centro di B. Si verifica facilmente allora che G è dotato canonicamente della struttura di anello, ma in generale G, pensato come A-modulo, non è di tipo finito. Infatti, pur potendo negli elementi $\dots b_i^{i'} b_j^{j'} b_k^{k'} \dots$ di G supporre gli esponenti limitati superiormente (cioè $0 \leq i' \leq n_i - 1$; $0 \leq j' \leq n_j - 1$; $0 \leq k' \leq n_k - 1$; etc...) valendosi delle equazioni di dipendenza integrale di $b_i, b_j, b_k, \dots$ su A, gli elementi necessari per la generazione di G come A-modulo possono essere infiniti in quanto le «parole» in $b_1, b_2, \dots, b_n$ possono estendersi «in lungo».

Si ha invece che l'esistenza di un numero naturale p $(p \geq n)$ tale che ogni «parola» in $b_1, b_2, \dots, b_n$ possa ottenersi come combinazione lineare con coefficienti in A di «parole» di lunghezza minore o uguale a p, comporta che l'A-modulo G sia di tipo finito.

In tal caso $G_s[x^N]$ è un G-modulo di tipo finito essendo x integrale sinistro su B, anzi su G. Per il teorema di transitività della finita generazione dei moduli si ha che $G_s[x^N]$ è un A-modulo di tipo finito e quindi (per la noetherianità di A) x risulta integrale sinistro su A.

[17] Compatibilmente con le relazioni già esistenti in B.

Analogamente a quanto si è fatto per il teorema della chiusura integrale si può dimostrare che le condizioni I), II), III), precedentemente imposte agli anelli A, B, implicano la finita generabilità dell'A-modulo G e quindi il fatto che x sia integrale sinistro su A.

In conclusione valgono i seguenti teoremi:

TEOREMA I (della chiusura integrale): *Sia A un anello noetheriano sinistro e B un sopraanello di A. Se S è un sottoinsieme di B tale che $A[S] = B$, e se per ogni b, b' di $A \cup S$ vale la seguente condizione*

$$(6) \qquad b\, b' = a\, b'\, b + a', \quad \text{(per qualche } a, a' \text{ di } A),$$

la chiusura integrale sinistra di A in B è un sottoanello di B contenente A.

TEOREMA II (della transitività della dipendenza integrale): *Sia A un anello noetheriano sinistro, B un sopraanello di A integrale sinistro su A e C un sopraanello di B. Se S è un sottoinsieme di B tale che $A[S] = B$, e se per gli elementi di $A \cup S$ vale la condizione* (6), *l'anello C risulta integrale sinistro su A* [18].

ESEMPIO: Sia A un anello noetheriano a sinistra di caratteristica 2 e sia S il seguente insieme di matrici $S = \left\{ \left\| \begin{matrix} \bar{a} & b \\ c & \bar{a} \end{matrix} \right\| \right\}$ dove $\bar{a}$ è un elemento fisso di A e b, c sono elementi generici del centro di A. Gli elementi di S sono integrali sinistri su A verificando l'equazione: $X^2 - 2\,\bar{a}\,X + \bar{a}^2 - bc = 0$.

Si può inoltre verificare che i commutatori di $A \cup S$ sono contenuti in A e quindi, per quanto detto in precedenza, tutti gli elementi di $A[S]$ sono integrali sinistri su A.

[18] Analoghi teoremi — come si è fatto notare all'inizio del n. 4 — valgono cambiando la parola « sinistro » con « destro », e la condizione (6) con la seguente:

$$(6') \qquad bb' = b'\,ba + a', \quad \text{(per qualche } a, a' \text{ di } A).$$

CAPITOLO II

1. Il teorema di Cohen-Seidenberg nel caso commutativo.

Il fatto che un anello commutativo B sia integrale su un suo sottoanello A comporta proprietà notevoli nella corrispondenza di Grell [1] fra gli ideali di B e quelli di A. Queste proprietà sono raccolte nel classico primo teorema di Cohen-Seidenberg ed in alcune proposizioni ad esso collaterali di cui esporremo per sommi capi i punti più essenziali.

LEMMA: *Sia A un anello commutativo e B un sopraanello commutativo di A, che si supponga privo di divisori dello zero ed integrale su A. Condizione necessaria e sufficiente affinché B sia un corpo è che tale risulti A.*

DIMOSTRAZIONE: Se A è un corpo, allora, per ogni x non nullo di B, l'anello $A[x]$ risulta uno spazio vettoriale di dimensione finita su A. D'altra parte $y \longrightarrow xy$ è un'applicazione A-lineare di $A[x]$ in sé che è iniettiva (poiché A è un anello d'integrità ed x non nullo) e quindi è pure suriettiva; esiste perciò un x' in $A[x]$ tale che $xx' = 1$, da cui risulta che B è un corpo.

Viceversa sia B un corpo ed x un elemento non nullo di A. Sia x^{-1} l'inverso di x in B e sia.

$$(x^{-1})^n + a_1 (x^{-1})^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (a_i \in A\,;\ i = 1, 2, \dots, n), \tag{1}$$

una sua equazione di dipendenza integrale su A. Moltiplicando ambo i membri della (1) per x^{n-1} si ottiene che $x^{-1} \in A$, ovvero che A è un corpo.

TEOREMA (di COHEN-SEIDENBERG): *Sia A un anello commutativo e B un sopraanello commutativo di A, integrale su A. Valgono allora le seguenti proprietà:*

(1) Ved. [4], pp. 490-523.

I) (LYING-OVER). *Per ogni ideale primo* $\mathcal{P}$ *di* A *esiste un ideale primo* $\mathcal{P}'$ *di* B *tale che* $\mathcal{P}' \cap A = \mathcal{P}$.

II) (GOING-UP). *Se* $\mathcal{P}'$ *e* $\mathcal{P}''$ *sono ideali primi di* B, *con* $\mathcal{P}' \cap A = \mathcal{P}'' \cap A$, *si ha* $\mathcal{P}' = \mathcal{P}''$.

III) *Se* $\mathcal{P}'$ *è un ideale primo di* B *tale che* $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \cap A$, *condizione necessaria e sufficiente affinché* $\mathcal{P}$ *sia massimale è che tale sia* $\mathcal{P}'$.

DIMOSTRAZIONE: La proprietà III) discende immediatamente dal precedente lemma appena si applichi il risultato ivi ottenuto agli anelli quozienti $A/\mathcal{P}$ e $B/\mathcal{P}'$.

La parte II) risulta dalla III) applicata agli anelli $A_{\mathcal{P}}$ e $B_{\mathcal{P}}$ (2).

Con analoghe argomentazioni si può poi vedere che è sufficiente dimostrare la I) nel caso che A sia un anello locale e $\mathcal{P}$ l'unico suo ideale massimale: in questo caso si prende per $\mathcal{P}'$ uno qualsiasi degli ideali massimali di B e si applica il lemma.

COROLLARIO I: *Se* $\mathcal{P}'_1 \subset \mathcal{P}'_2 \subset \ldots \subset \mathcal{P}'_s$ *è una catena strettamente crescente di ideali primi di* B, *gli ideali primi* $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}'_i \cap A$ *formano una catena strettamente crescente. Se invece* $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{P}_s$ *è una catena strettamente crescente di ideali primi di* A *e se* $\mathcal{P}'_1$ *è un ideale primo con* $\mathcal{P}'_1 \cap A = \mathcal{P}_1$, *esiste una catena* $\mathcal{P}'_1 \subset \ldots \subset \mathcal{P}'_s$ *in* B, *di origine* $\mathcal{P}'_1$, *tale che* $\mathcal{P}'_i \cap A = \mathcal{P}_i (i = 1, 2, \ldots, s)$.

La prima parte risulta dal «going-up». La seconda parte basta dimostrarla per $s = 2$ applicando il «lying-over» agli anelli $A/\mathcal{P}_1$ e $B/\mathcal{P}'_1$, di cui il primo è canonicamente immerso nel secondo.

COROLLARIO II: *La dimensione di Krull di* A *coincide con quella di* B (3). *Se* α' *è un ideale di* B *e se* $\alpha = \alpha' \cap A$, *si ha*: $\mathrm{ht}(\alpha') \leq \mathrm{ht}(\alpha)$ *e* $\mathrm{coht}(\alpha') = \mathrm{coht}(\alpha)$.

L'uguaglianza $\dim A = \dim B$ risulta dal corollario I. Analogamente dal corollario I discende $\mathrm{coht}(\alpha') = \mathrm{coht}(\alpha)$: basta applicare

(2) Con $B_{\mathcal{P}}$ si indica l'anello dei quozienti di B rispetto al sistema moltiplicativamente chiuso $A \dot{-} \mathcal{P}$.

(3) Dicesi dimensione di un anello commutativo A, e si scrive dim. A, l'estremo superiore delle lunghezze delle catene strettamente crescenti di ideali primi di A. Se $\mathcal{P}$ è un ideale primo di A, dicesi altezza di $\mathcal{P}$ la dimensione dello anello locale $A_{\mathcal{P}}$. Se α è un ideale di A, dicesi coaltezza di α — e si scrive $\mathrm{coht}(\alpha)$ — la dimensione di A/α, ed altezza di α — che si scrive $\mathrm{ht}(\alpha)$ — il limite inferiore delle altezze degli ideali primi $\mathcal{P}$ contenenti α.

il corollario stesso agli anelli A/α e B/α'. Infine per la disuguaglianza sulle altezze basta osservare che essa è immediata nel caso che α' sia primo; il caso generale può poi ricondursi subito a questo.

Corollario III: *Il radicale (di Perlis-Jacobson) di* A (4) *è l'intersezione del radicale di* B *con* A *(cioè* $\mathrm{Rad}\,A = (\mathrm{Rad}\,B) \cap A$*). Analogamente il nilradicale di* A *è la traccia su* A *del nilradicale di* B.

2. Ideali primi e fortemente primi.

Prima di inoltrarci in « opportune interpretazioni » del teorema di Cohen-Seidenberg nel caso di anelli non commutativi, vogliamo introdurre alcune nozioni di algebra non commutativa di cui faremo uso in seguito.

Definizione: In un anello R un ideale $\mathcal{P}$ dicesi *primo destro* (*sinistro, bilatero*) se $\mathcal{P} \neq R$ e se per ogni coppia di ideali destri (sinistri, bilateri) I, $\mathcal{I}$ tali che $I \cdot \mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}$ si ha $I \subseteq \mathcal{P}$ oppure $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}$ (5).

Un ideale α di R dicesi invece fortemente primo se $R - \alpha$ è un sistema moltiplicativamente chiuso.

Si può dimostrare il seguente:

Teorema: *Le seguenti proposizioni sono fra loro equivalenti:*

a) $\mathcal{P}$ *è un ideale primo destro di* R.

b) $\mathcal{P}$ *è un ideale primo sinistro di* R.

c) $\mathcal{P}$ *è un ideale primo bilatero* (6) *di* R.

d) $aRb \subseteq \mathcal{P}$ *implica* $a \in \mathcal{P}$ *oppure* $b \in \mathcal{P}$ (per ogni coppia (a, b) di elementi di R).

e) $R \dot{-} \mathcal{P}$ *è un m-sistema* (7).

Si vede altresì facilmente la validità delle seguenti proposizioni:

(4) Ved. [5], pagg. 4-10.

(5) La definizione da noi introdotta di ideale primo destro non deve essere confusa con una definizione data recentemente da Johnson. Un ideale destro I di un anello R — secòndo Johnson — dicesi primo destro se per ogni coppia di ideali destri α e β di R si ha: $\alpha\beta \subseteq I$ e $\beta \neq 0 \Longrightarrow \alpha \subseteq I$.

(6) Si userà, in seguito, omettere la parola bilatero.

(7) Ved. [5], pag. 195.

1) *Un ideale* $\mathcal{P}$ *di un anello* R *è primo se, e solo se, per ogni coppia* $b, c \in R - \mathcal{P}$ *esiste un elemento* x *di* R *tale che* $bxc \notin \mathcal{P}$.

2) *Se* R *è un anello commutativo, l'insieme degli ideali primi di* R *coincide con quello degli ideali fortemente primi.*

3) *In ogni anello* R *unitario, ogni ideale fortemente primo è un ideale primo.*

4) *Ogni ideale primitivo (sia destro che sinistro) è primo* (8). *In particolare, quindi, ogni ideale massimale è primo.*

5) *Un ideale bilatero che sia massimale sinistro è fortemente primo.* (Infatti tale ideale è pure massimale destro).

6) *Sia* S *un m-sistema di un anello* R *e* $\mathcal{P}$ *un ideale massimale fra quelli disgiunti da* S. *L'ideale* $\mathcal{P}$ *è allora primo.* (Infatti se $\mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{B} \not\subseteq \mathcal{P}$, si ha pure $s \in (\mathcal{A} + \mathcal{P}) \cap S$, $s' \in (\mathcal{B} + \mathcal{P}) \cap S$, da cui $sRs' \subseteq$ $\subseteq (\mathcal{A} + \mathcal{P})(\mathcal{B} + \mathcal{P}) \subseteq \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{P}$ e quindi $\mathcal{A}\mathcal{B} \not\subseteq \mathcal{P}$ ché, altresì, S non sarebbe un m-sistema).

7) *Sia* S *un sistema moltiplicativamente chiuso di un anello* R *e* $\mathcal{P}$ *un ideale, massimale sia sinistro che destro fra quelli disgiunti da* S. *L'ideale risulta fortemente primo.* (Infatti se $a \notin \mathcal{P}$, $b \notin \mathcal{P}$, si ha $s \in (\mathcal{P} + R\,a) \cap S$ ed $s' \in (\mathcal{P} + b\,R) \cap S$, da cui $ss' \in (\mathcal{P} + R\,a) \cdot$ $\cdot (\mathcal{P} + bR) \subseteq \mathcal{P} + R\,a\,b\,R$ e quindi, essendo S moltiplicativamente chiuso, $ab \notin \mathcal{P}$).

8) *In un anello* R *in cui ogni ideale destro (sinistro) sia bilatero, ogni ideale primo è pure fortemente primo.*

3. Il teorema di Cohen-Seidenberg nel caso non commutativo.

Quale parziale estensione al caso non commutativo del teorema di Cohen-Seidenberg, di cui al n. 1, qui ci proponiamo di dimostrare il seguente:

TEOREMA: *Sia* B *un anello non commutativo ed* A *un suo sottoanello contenuto nel centro* $Z(B)$ *di* B*; l'anello* B *sia inoltre integrale su* A. *Valgono allora le seguenti proprietà:*

I) (lying-over) *Per ogni ideale* $\mathcal{P}$ *di* A *che sia primo (e quindi fortemente primo) esiste un ideale primo* $\mathcal{P}'$ *di* B *tale che* $\mathcal{P}' \cap A = \mathcal{P}$ *(e* $\mathcal{P}'$ *può essere scelto in guisa che la sua massimalità in* B *consegua da quella, eventuale, di* $\mathcal{P}$ *in* A).

(8) Ved. [5], pag. 195 (prop. 1).

II) (going-up) *Se* $\mathcal{P}$ *è un ideale primo di* A *e* $\mathcal{P}'$, $\mathcal{P}''$ *due ideali di* B, *rispettivamente fortemente primo e primo, tali che* $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}''$ *e* $\mathcal{P}' \cap A = \mathcal{P}'' \cap A = \mathcal{P}$, *allora* $\mathcal{P}' = \mathcal{P}''$.

Dimostrazione: Si consideri infatti in A un ideale primo $\mathcal{P}$, e sia $\mathcal{F}$ la famiglia degli ideali α di B tali che $\alpha \cap A \subseteq \mathcal{P}$; sia poi $\mathcal{P}'$ un elemento massimale di $\mathcal{F}$ nell'ordinamento per inclusione (9). Cominciamo col verificare che $\mathcal{P}' \cap A = \mathcal{P}$.

A tale scopo supponiamo, per assurdo, che si abbia $\mathcal{P}' \cap A \subsetneqq \mathcal{P}$ e che quindi esista un $x \in \mathcal{P} \dot{-} (\mathcal{P}' \cap A)$. Poiché $\mathcal{P}'$ è massimale in $\mathcal{F}$, l'ideale $\mathcal{P}' + B\,x\,B = \mathcal{P}' + xB$ è tale che:

$$\mathcal{P}' + xB \supsetneqq \mathcal{P}', \qquad (\mathcal{P}' + xB) \cap A \not\subseteq \mathcal{P},$$

dal che segue l'esistenza di un elemento y di $(\mathcal{P}' + xB) \cap A$, con $y \notin \mathcal{P}$; ed un siffatto y è della forma $y = p' + xz$, con $p' \in \mathcal{P}'$ e $z \in B$.

Essendo B integrale su A, da $z \in B$ discende la validità della seguente equazione di dipendenza integrale

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0, \qquad (a_i \in A\,;\ i = 1, 2, \dots, n),$$

dalla quale, moltiplicando ambo i membri per x^n, si ottiene

$$(x\,z)^n + a_1\,x\,(x\,z)^{n-1} + \dots + a_n\,x^n = 0,$$

e quindi, risultando $xz = y - p'$:

$$(y - p')^n + a_1\,x\,(y - p')^{n-1} + \dots + a_n\,x^n = 0.$$

Indicando con q l'elemento $x\,(a_1\,y^{n-1} + \dots + a_n\,x^{n-1})$ si ha che $y^n + q \in \mathcal{P}' \cap A$, $y^n \notin \mathcal{P}$ (essendo $\mathcal{P}$ ideale fortemente primo), $q \in \mathcal{P}$ e perciò $y^n + q \notin \mathcal{P}$, il che è assurdo. Il fatto poi che $\mathcal{P}'$ sia primo è immediata conseguenza della proposizione 6); e la sua massimalità in B — per lo stesso modo in cui è stato costruito — consegue da quella (eventuale) di $\mathcal{P}$ in A.

Sempre indicando con $\mathcal{P}$ un ideale primo di A, siano ora $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}''$ rispettivamente un ideale fortemente primo e primo di B tali che $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}''$ e $\mathcal{P}' \cap A = \mathcal{P}'' \cap A = \mathcal{P}$. Andiamo a verificare che $\mathcal{P}' = \mathcal{P}''$.

(9) L'esistenza di un tale $\mathcal{P}'$ è garantita dall'induttività di $\mathcal{F}$.

A tale scopo sia c un elemento di $\mathcal{P}''$ e sia n il minor numero di elementi $a_1, a_2, \dots, a_n$ di A scelti in guisa che:

$$c^n + a_1 c^{n-1} + \dots + a_n = p', \qquad \text{con } p' \in \mathcal{P}'.$$

Ne viene che $a_n = p' - c(c^{n-1} + a_1 c^{n-2} + \dots + a_{n-1})$ appartiene a $\mathcal{P}'' \cap A = \mathcal{P}' \cap A = \mathcal{P}$, da cui, essendo $\mathcal{P}'$ fortemente primo, $c^{n-1} + a_1 c^{n-2} + \dots + a_{n-1}$ è un elemento di $\mathcal{P}'$, il che è assurdo per la proprietà minimale dell'intero n.

Osservazione: Nel caso che l'anello B verifichi la condizione di Lie, il teorema di Cohen-Seidenberg e relativi corollari sussistono intieramente (gli ideali di cui si parla, in questo caso, sono tutti fortemente primi).

4. Alcuni risultati di algebra locale non commutativa.

Definizione: Un anello R (in cui $0 \neq 1$) dicesi *anello locale* se verifica una delle seguenti condizioni fra loro equivalenti (10).

a) $R/\mathrm{Rad}\, R$ è un corpo ($\mathrm{Rad}\, R$ = radicale di Perlis-Jacobson di R).

b) R ha un unico ideale massimale destro (sinistro).

c) Gli elementi non unitari di R sono contenuti in un ideale proprio.

d) Gli elementi non unitari di R formano un ideale proprio.

e) Per ogni $r \in R$ o r oppure $1 - r$ è unitario.

f) Per ogni $r \in R$ o r oppure $1 - r$ è invertibile a destra (sinistra).

Definizione: Sia A un anello ed S un suo sottoinsieme (in particolare un sistema moltiplicativamente chiuso). Un anello B dicesi *anello dei quozienti di A rispetto ad S* se è soluzione del problema di applicazione universale relativamente ai seguenti dati:

« il tipo di struttura Σ considerato è quello d'anello; i morfismi sono gli omomorfismi di anello e le α-applicazioni sono gli omomorfismi di A in un anello tali che l'immagine di S con uno qualunque di siffatti omomorfismi sia composta da elementi invertibili » (11).

(10) Ved. [6], pagg. 75.
(11) Ved. [1], pagg. 43-50.

Il problema di applicazione universale ora menzionato ha sempre soluzione. Si consideri infatti una famigla $\{X_s\}_{s \in S}$ di indeterminate, con indici in S, non fra loro permutabili né permutabili con gli elementi di A. Si viene così a costruire la struttura polinomiale $A[X_s]_{s \in S}$ (12). Si consideri l'ideale $\mathcal{J}$ generato dagli elementi $sX_s - 1$, $X_s s - 1$ $(s \in S$ in $A[X_s]_{s \in S}$ e poi l'anello quoziente $B = A[X_s]_{s \in S}/\mathcal{J}$. Si verifica immediatamente che B è soluzione del problema di applicazione universale sopra posto.

Si noti che, in generale, gli elementi di B non possono essere posti in forma «maneggevole» come invece accade nel caso che l'anello A sia commutativo. Tali elementi vengono però ad assumere forme molto particolari se si introducono in (A, S) le condizioni generalizzate di Ore.

Precisamente, seguendo P. Gabriel (13) diamo la seguente

DEFINIZIONE: Siano B un anello, $f: A \to B$ un omomorfismo di anello. La coppia (B, f) è un *anello di frazioni a sinistra di A con denominatori in S* se verifica le condizioni seguenti:

a) se $f(a) = 0$ esiste un $s \in S$ tale che $sa = 0$,

b) se $s \in S$, allora $f(s)$ è invertibile in B,

c) ogni elemento di B è della forma $f(s)^{-1} f(a)$, $(a \in A,\ s \in S)$.

Si dimostra che: « *Condizione necessaria e sufficiente affinché l'anello A possieda un anello di frazioni a sinistra a denominatori in S è che siano verificate le seguenti condizioni:*

a') per ogni $s \in S$, $a \in A$, esiste un $t \in S$ e un $b \in A$ tali che si abbia $ta = bs$ (condiz. di Ore).

b') se $a \in A$, $s \in S$ verificano la $as = 0$, esiste un $t \in S$ tale che $ta = 0$ ».

È banale verificare che se A possiede un anello di frazioni a sinistra (B, f), a denominatori in S, l'anello B è soluzione del problema di applicazione universale precedentemente posto.

Sempre con le solite notazioni vediamo ora alcune proprietà degli ideali in un anello di frazioni a sinistra.

I) *Sia β' un ideale bilatero in $S^{-1}A$ (14). Se $\beta = f^{-1}(\beta')$, allora si ha $\beta' = S^{-1}\beta$ (15).*

(12) Ved. [7], pagg. 85-90.

(13) Ved. [3], pagg. 415-416.

(14) Indicheremo così un qualunque anello di frazioni a sinistra a denominatori in S.

(15) Bisogna notare che (cosa che non accadeva nel caso che A fosse com-

II) *Sia* β' *un ideale sinistro in* $S^{-1}A$. *Se* $\beta = f^{-1}(\beta')$ *è un ideale sinistro di* A, *si ha* $\beta' = S^{-1}\beta$. *Inoltre se* β *è un ideale sinistro di* A (*non necessariamente saturato con* S) *allora* $S^{-1}\beta$ *è un ideale sinistro di* $S^{-1}A$.

Infatti se b, b' sono due elementi di β si ha:

$$s^{-1}b + t^{-1}b' = r^{-1}(ub + vb') \in S^{-1}\beta, (s, t \in S; r, u \in S; v \in A),$$

e ciò perché, per la condizione di Ore, per ogni coppia (s, t) di elementi di S esiste un elemento u di S ed un elemento v di A tali che $us = vt = r$, ed inoltre:

$$s^{-1}a \cdot t^{-1}b = s^{-1}r^{-1}a'b = (rs)^{-1}a'b \in S^{-1}\beta, \quad (r \in S, a' \in A).$$

Quindi, in conclusione, *l'applicazione* $\beta' \rightarrow \beta = f^{-1}(\beta')$ *fra gli ideali sinistri di* $S^{-1}A$ *in ideali sinistri di* A *è un isomorfismo fra l'insieme degli ideali sinistri di* $S^{-1}A$ *sull'insieme degli ideali sinistri di* A *saturati con* S.

III) *Se* β' *è un ideale fortemente primo di* $S^{-1}A$, *allora* $\beta = f^{-1}(\beta')$ *è pure fortemente primo.*

Infatti, se così non fosse, esisterebbero degli elementi a, a' in $A - \beta$ con $aa' \in \beta$, donde $a/1$, $a'/1 \notin \beta'$, $aa'/1 \in S^{-1}\beta = \beta'$.

IV) *Se* β *è un ideale fortemente primo di* A *e disgiunto da* S, *allora* $\beta' = S^{-1}\beta$ *è un ideale bilatero fortemente primo di* $S^{-1}A$.

Infatti, per quanto si è visto nella proposizione II), per $s, t \in S$ ed $b, b' \in \beta$ si ha $s^{-1}b + t^{-1}b' \in S^{-1}\beta$. Inoltre $s^{-1}b\,t^{-1}a = s^{-1}r^{-1}c\,a$ $(r\,b = ct, rb \in \beta, t \in S)$, da cui $c \in \beta$, ovvero $ca \in \beta$ [16]. Infine $\beta' = S^{-1}\beta$ è fortemente primo poiché: $s^{-1}a\,t^{-1}a' = s^{-1}r^{-1}ca \notin S^{-1}\beta$, $(a, a' \notin \beta$; $ra = ct$; $a \notin \beta$ ovvero $ra \notin \beta$; $c, t \notin \beta$, $ca' \notin \beta)$.

V) *La controimmagine, attraverso l'omomorfismo* f, *di un ideale massimale sinistro di* $S^{-1}A$ *è un ideale sinistro di* A, *massimale fra quelli disgiunti da* S.

L'applicazione $\beta' \rightarrow \beta = f^{-1}(\beta')$, *ristretta agli ideali massimali sinistri di* $S^{-1}A$, *è un isomorfismo fra questo insieme e l'insieme degli ideali sinistri di* A, *massimali fra quelli disgiunti da* S.

mutativo) preso un ideale bilatero β in A, non sempre $S^{-1}\beta$ è un ideale bilatero in $S^{-1}A$, ciò che invece accade per gli ideali β di A che siano saturati con S. Quest'ultima eventualità accade sempre qualora S è contenuto nel centro di A.

[16] Da ciò viene che ogni ideale fortemente primo di A disgiunto da S è saturato con S.

VI) *Se $\mathcal{P}$ è un ideale fortemente primo in A, l'anello $(A - \mathcal{P})^{-1} A$ (qualora esista)è un anello locale.*

VII) *Se S è dotato di elementi centrali di A, l'anello A possiede sia un anello di frazioni a sinistra con denominatori in S, sia un anello di frazioni a destra (necessariamente isomorfi). Inoltre l'applicazione $\mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P} = f^{-1}(\mathcal{P}')$ fra gli ideali primi di $S^{-1} A$ negli ideali primi di A è un isomorfismo fra l'insieme degli ideali primi di $S^{-1} A$ sull'insieme degli ideali primi di A disgiunti da S.*

VIII) *Sia A un anello e B un suo sopraanello. Si indichi con S un sistema moltiplicativamente chiuso di A contenuto nel centro $Z(B)$ di B e sia A' il soprainsieme di A degli elementi integrali sinistri di B su A. Allora la totalità degli elementi integrali sinistri di $S^{-1} B$ su $S^{-1} A$ altro non è che $S^{-1} A'$.*

Infatti se $s^{-1} b$ è un elemento di $S^{-1} A'$, allora b appartiene ad A', cioè sussiste una relazione del tipo:

$$b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (a_i \in A),$$

da cui

$$(s^{-1} b)^n + a_1 s^{-1} (s^{-1} b)^{n-1} + \dots + a_n (s^{-1})^n = 0$$

e perciò $s^{-1} b$ è integrale sinistro su $S^{-1} A$.

Viceversa sia $s^{-1} x$ un elemento di $S^{-1} B$ integrale sinistro su $S^{-1} A$. Si verifica immediatamente che $x/1$ è pure integrale sinistro su $S^{-1} A$, e si ha quindi una relazione della forma:

$$(x/1)^n + t^{-1} a_1 (x/1)^{n-1} + \dots + t^{-1} a_n = 0, (a_i \in A, 1 \leq i \leq n; t \in S),$$

che può anche scriversi:

$$t^{-1} (tx^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n) = 0,$$

donde l'esistenza di un elemento $r \in S$ tale che:

$$r^n (tx^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n) = 0,$$

o meglio, essendo gli elementi di S centrali:

$$(rtx)^n + ra_1 (rtx)^{n-1} + \dots + r^n t^{n-1} a_n = 0.$$

Si conclude che rtx appartiene ad A' e perciò x appartiene ad $S^{-1} A'$ (essendo $rt \in S$) e così pure $s^{-1} x$.

IX) *Sia A un anello qualsiasi e B un suo sopraanello. Si indichi con $\mathcal{P}$ un ideale primo di A. Condizione necessaria e suffi-*

ciente affinché esista un ideale primo $\mathcal{P}'$ *di* B *tale che* $\mathcal{P}' \cap A = \mathcal{P}$ *è che si abbia :*

$$(B\mathcal{P}) \cap A = \mathcal{P}$$

dove con $B\mathcal{P}$ *si è indicato l'ideale generato da* $\mathcal{P}$ *in* B (17).

Infatti se esiste un ideale $\mathcal{P}'$ di B tale che $\mathcal{P}' \cap A = \mathcal{P}$ allora $B\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$ e quindi $B\mathcal{P} \cap A \subseteq \mathcal{P}' \cap A = \mathcal{P}$. Siccome l'inclusione opposta è evidente si ha: $B\mathcal{P} \cap A = \mathcal{P}$.

Viceversa se $B\mathcal{P} \cap A = \mathcal{P}$ si consideri l'm-sistema $S = A - \mathcal{P}$ di B. Per l'ipotesi fatta si ha che $S \cap B\mathcal{P} = \emptyset$ ed esiste allora un ideale $\mathcal{P}'$ primo di B [ved. prop. 6) del n. 2] con $\mathcal{P}' \cap S = \emptyset$, e $\mathcal{P}' \cap A \supseteq \mathcal{P}$. Inoltre l'ideale $\mathcal{P}'$ non può contenere alcun elemento di S e perciò è uguale a $\mathcal{P}$.

5. Il teorema di Cohen-Seidenberg nel caso non commutativo secondo il metodo di Krull.

Tentiamo ora di dimostrare, sotto opportune ipotesi, una parte del teorema di Cohen Seidenberg seguendo la linea tracciata da Krull nel caso di anelli commutativi.

LEMMA I: *Sia* B *un anello ed* A *un suo sottoanello contenuto nel centro* $Z(B)$ *di* B*; l'anello* B *sia inoltre integrale su* A*. Se* $\mathcal{P}'$ *è un ideale primo di* B *e massimale, allora* $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \cap A$ *è massimale in* A.

DIMOSTRAZIONE: Infatti — per passaggio ai quozienti — basta dimostrare che se B è semplice (18), A risulta essere un corpo. Se z, quindi, è un elemento non nullo di A, l'ideale Bz generato da z coincide con B; di conseguenza esiste in B l'elemento z^{-1} inverso di z, il quale possiede un'equazione di dipendenza integrale su A del tipo:

$$(z^{-1})^n + a_1 (z^{-1})^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (a_i \in A\,;\ i = 1, 2, \dots, n),$$

dalla quale, moltiplicando i due membri per z^{n-1}, si ottiene la tesi.

(17) Questo fatto accade « spesso » non impegnando necessariamente l'integralità di B su A. Ad esempio basta che esista un B-modulo M che risulti un A-modulo fedelmente piatto.

(18) Un anello A dicesi *semplice* se possiede solo due ideali, cioè se (0) è ideale massimale.

LEMMA II: *Sempre con le notazioni e le ipotesi del lemma precedente, sia $\mathcal{P}$ un ideale massimale di A e $\mathcal{P}'$ un ideale fortemente primo di B con $\mathcal{P}' \cap A = \mathcal{P}$. L'ideale $\mathcal{P}'$ risulta allora massimale sinistro e destro in B.*

DIMOSTRAZIONE: Infatti ciò equivale a dimostrare che un anello B privo di divisori dello zero, integrale su un corpo è necessariamente un corpo.

TEOREMA (lying-over): *Sia B un anello ed A un suo sottoanello contenuto nel centro $Z(B)$ di B; l'anello B sia inoltre integrale su A. Per ogni ideale primo $\mathcal{P}$ di A esiste allora almeno un ideale primo $\mathcal{P}'$ di B con $\mathcal{P}' \cap A = \mathcal{P}$.*

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo dapprima che A sia un anello locale e che $\mathcal{P}$ sia il suo unico ideale massimale. Allora per ogni ideale massimale $\mathcal{M}'$ di B, $\mathcal{M}' \cap A$ risulta essere un ideale massimale di A (per quanto visto nel lemma I) e quindi uguale a $\mathcal{P}$.

In generale, posto $S = A - \mathcal{P}$, si ha che $S^{-1} A$ è un anello locale il cui ideale massimale è $S^{-1} \mathcal{P}$, ed inoltre $S^{-1} B$ risulta integrale su $S^{-1} A$. Esiste quindi un ideale primo σ' di $S^{-1} B$ con $\sigma' \cap S^{-1} A = S^{-1} \mathcal{P}$; ed è noto che $\sigma' = S^{-1} \mathcal{P}'$ essendo $\mathcal{P}'$ ideale primo di B, con $\mathcal{P}' \cap A = \mathcal{P}$.

TEOREMA (going-up): *Sia B un anello ed A un suo sottoanello contenuto nel centro $Z(B)$ di B; l'anello B sia inoltre integrale su A. Sia poi $\mathcal{P}$ un ideale primo di A. Se $\mathcal{P}'$ è un ideale fortemente primo di B, con $\mathcal{P}' \cap A = \mathcal{P}$ e $\mathcal{P}''$ un ideale di B con $\mathcal{P}'' \cap A = \mathcal{P}$, e se $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}''$, si ha allora $\mathcal{P}' = \mathcal{P}''$.*

DIMOSTRAZIONE: Posto infatti $S = A - \mathcal{P}$ si ha che, $S^{-1} B$ risulta integrale su $S^{-1} A$ ed $S^{-1} \mathcal{P}$ è ideale massimale dell'anello locale $S^{-1} A$. Gli ideali $S^{-1} \mathcal{P}'$ e $S^{-1} \mathcal{P}''$ hanno traccia uguale su $S^{-1} \mathcal{P}$ in $S^{-1} A$, ed inoltre $S^{-1} \mathcal{P}'' \supseteq S^{-1} \mathcal{P}'$. Essendo $S^{-1} \mathcal{P}''$ massimale, lo è pure $S^{-1} \mathcal{P}'$ da cui la tesi.

OSSERVAZIONE: Da quanto precede si deduce che, nell'ipotesi che gli elementi di A siano centrali per B e B sia integrale su A, è stato raggiunto il «lying-over» e il «going-up» di Cohen-Seidenberg.

L'applicazione, quindi, $\mathcal{P}' \to \mathcal{P}' \cap A$ è una suriezione dello spettro primo Spec(B) di B su Spec(A). Per quanto riguarda, poi, la dimensione di Krull, possiamo dire che $\dim A \leq \dim B$ e che se α' è un ideale di B, $\operatorname{coht}(\alpha' \cap A) \leq \operatorname{coht}(\alpha')$.

Resta aperto il problema di vedere se un anello primo B integrale su un corpo A $(A \subseteq Z(B))$ è un anello semplice o almeno primitivo. Per ora si può solo affermare che B è un anello primo e pseudoregolare in cui ogni elemento regolare è invertibile.

6. Il teorema del « going-up » nel caso di algebre finite.

Per concludere, facciamo vedere come il teorema del « going-up », già esposto nel n. 5, può essere generalizzato al caso in cui B sia una A-algebra finita.

In tale caso, infatti, per ogni ideale primo $\mathcal{P}$ di A, si ha che $B_{\mathcal{P}} / \mathcal{P} B_{\mathcal{P}} = A_{\mathcal{P}} / \mathcal{P} A_{\mathcal{P}} \otimes_{A_{\mathcal{P}}} B_{\mathcal{P}}$ [19] è un'algebra finita sul corpo (commutativo) $A_{\mathcal{P}} / \mathcal{P} A_{\mathcal{P}}$; inoltre gli ideali primi di $B_{\mathcal{P}} / \mathcal{P} B_{\mathcal{P}}$ sono in corrispondenza biunivoca con gli ideali primi di $B_{\mathcal{P}}$ contenenti $\mathcal{P} B_{\mathcal{P}}$ e quindi in corrispondenza biunivoca con gli ideali primi Q tali che $Q \cap A = \mathcal{P}$; infine $B_{\mathcal{P}} / \mathcal{P} B_{\mathcal{P}}$ intesa come algebra finita sul corpo $A_{\mathcal{P}} / \mathcal{P} A_{\mathcal{P}}$ è un anello artiniano, e perciò tutti i suoi ideali primi (necessariamente in numero finito) sono massimali.

Da quanto sopra risulta che se $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}''$ sono due ideali primi di B con $\mathcal{P}' \supseteq \mathcal{P}''$ e $\mathcal{P}' \cap A = \mathcal{P}'' \cap A = \mathcal{P}$, si ha necessariamente $\mathcal{P}' = \mathcal{P}''$; e gli ideali primi di B sopra $\mathcal{P}$ sono in numero finito. Per quanto riguarda, da ultimo, « la dimensione di Krull », si perviene agli stessi risultati già ottenuti nel caso che i due anelli A e B siano commutativi.

[19] Si osservi che $B_{\mathcal{P}}$ è integrale su $A_{\mathcal{P}}$ e quindi $[(\mathcal{P} A_{\mathcal{P}}) B_{\mathcal{P}}] \cap A_{\mathcal{P}} = \mathcal{P} A_{\mathcal{P}}$ ovvero, per la proprietà IX) del n. 4, $(\mathcal{P} B_{\mathcal{P}}) \cap A_{\mathcal{P}} = \mathcal{P} A_{\mathcal{P}}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. Bourbaki, *Théorie des ensemble*, chap.4; Hermann, Paris, (1957).

[2] I. S. Cohen, A. Seidenberg, *Prime ideals and integral dependence*; Bull. Am. Math. Soc. 52, (1946), pp. 252-261.

[3] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*; Bull. Soc. Math. France 90, (1962), pp. 323-448.

[4] H. Grell, *Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ringe*; Math. Ann. t. 97, (1927), pp. 490-523.

[5] N. Jacobson, *Structure of Rings*; Am. Math. Soc. Vol. XXXVII, (1956).

[6] J. Lambek, *Lectures on rings and modules*; Blaisdell, (1966).

[7] A. Robinson, *Théorie Métamathématique des idéaux*; Gauthier-Villars, Paris, (1955).

[8] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative Algebra*; Vol. I, Van Nostrand, London, (1958).